KTH, Matematik
Maria Saprykina

Tentamen i SF1644, Envariabelsanalys, 13-01-2011.

Inga hjälpmedel tillåtna. Samtliga uppgifter poängsätts med maximalt 4 poäng vardera. Fullständiga lösningar krävs för full poäng. Motivera väl och skriv prydligt och ordentligt. Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
För högre betyg krävs att man samlar en del poäng på uppgifterna 7-9, s. k. VG-poäng. Preliminära betygsgränser: A: 27 poäng varav minst 6 VG-poäng, B: 24 poäng varav minst 3 VG-poäng, C: 21 poäng, D: 18 poäng, E: 16 poäng, FX: 14 poäng.
Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx inom 4 veckor. Kontakta i så fall Maria Saprykina (masha@math.kth.se).

1. Bestäm de punkter på kurvan $y = xe^{1-x^2}$ där tangenten är horizontell (dvs parallell med x-axeln). Bestäm också tangenternas ekvationer i dessa punkter.
Lösning: Låt $f(x) = xe^{1-x^2}$. Tangenten är horisontell presis när derivatan $f'(x)$ är 0.

$$f'(x) = (1-2x^2)e^{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Observera att $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{\frac{e}{2}}$, and $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{\frac{e}{2}}$. Tangenten är alltså horisontell i punkterna $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{e}{2}}\right)$ and $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{\frac{e}{2}}\right)$. Tangenten i den första punkten har ekvation $y = \sqrt{\frac{e}{2}}$, och tangenten i den andra punkten har ekvation $y = -\sqrt{\frac{e}{2}}$.

2. Beräkna integralen $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot e^{\cos x} dx$ med hjälp av substitutionen $t = \cos x$.
Lösning: Om vi sätter $t = \cos x$, så är $t(x)$ injektiv i intervallet $(0, \frac{\pi}{4})$, och $dt = -\sin x dx$, $x = 0 \Leftrightarrow t = 1$, $x = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Vi får:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot e^{\cos x} dx = -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^t dt = e - e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

3. Bestäm den lösning $y(t)$ till differentialekvationen $y''(t)+9y(t) = 3$ som också uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
Lösning: Först söker vi den allmänna lösningen $y_h(t)$ till den motsvarande homogena ekvationen. Karakteristiska ekvationen $r^2 + 9 = 0$ har imaginära

rötter $r = \pm 3i$. $y_h(t) = A\cos 3t + B\sin 3t$ där A och B är godtyckliga konstanter. Vidare, en partikulär lösning till den icke-homogena ekvationen kan sökas på formen $y_p(t) = C =$const. Insättning i ekvationen ger $C = \frac{1}{3}$. Alltså, den allmänna lösningen $y_a(t)$ till den icke-homogena ekvationen är

$$y_a(t) = A\cos 3t + B\sin 3t + \frac{1}{3},$$

där A och B är godtyckliga konstanter. Vidare ska vi bestämma konstanterna med hjälp av begynnelsevillkoren. Först ser vi att $y(0) = 0$ ger $A = -\frac{1}{3}$. Vidare ger $y'(0) = 1$ att $B = \frac{1}{3}$. Lösningen till begynnelsevärdesproblemet ovan är alltså

$$y(t) = -\frac{1}{3}\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{3}.$$

4. Skriv upp en Riemannsumma till integralen $\int_1^3 x^2 dx$ med 4 delintervall.

Lösning: Vi integrerar funktionen $f(x) = x^2$. Vi delar integrationsintervallet i 4 lika stora delintervall med längd $\Delta x_j = \frac{1}{2}$. Delningspunkterna är då $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{5}{2}$, $x_4 = 3$. Vi väljer att i varje delintervall ta funktionsvärdet i den vänstra ändpunkten på delintervallet, multiplicerar detta med delintervallets längd och summerar. Då får vi en Riemannsumma

$$\sum_{j=0}^{3} f(x_j)\Delta x_j = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{27}{4}.$$

5. Hur många nollställen har funktionen $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \arctan x$ i intervallet $x > -1$?

Lösning: Observera att $f(0) = 1 > 0$, och $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\pi/2 < 0$. Eftersom funktionen är kontinuerlig i intervallet $x > -1$, måste den anta alla mellanliggande värden, alltså antar det värdet 0 minst en gång i detta intarvall.

Vi deriverar: $f'(x) = -\frac{1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{1+x^2}$. Derivatan är definierad för alla $x > -1$ och $f'(x) < 0$ för alla $x > -1$. Det innebär att funktionen är strikt avtagande i hela intervallet, och antar värdet 0 bara en gång.

Svar: Ett nollställe.

6. Bestäm gränsvärdet $\lim_{x\to 1} \frac{1 + 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}}}{(\ln x)^2}$.

Lösning: Observera att $\lim_{x\to 1} 1 + 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} = 0$ och $\lim_{x\to 1} (\ln x)^2 = 0$. Gränsvärdet ovan är av typ $\left[\frac{0}{0}\right]$, och vi kan använda l'Hospitals regel:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1 + 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}}}{(\ln x)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x^{-1/2} - x^{-2/3}}{2\frac{1}{x}\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{x^{1/2} - x^{1/3}}{2\ln x}.$$

Det sista gränsvärdet är också av typ $\left[\frac{0}{0}\right]$. Vi kan använda l'Hospitals regel en gång till: $\lim_{x\to 1} \frac{x^{1/2}-x^{1/3}}{2\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{\frac{2}{x}} = \frac{1}{12}$.

Svar: $\lim_{x\to 1} \frac{1+2x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{3}}}{(\ln x)^2} = \frac{1}{12}$.

7. En 1 meter lång tråd är spänd mellan punkterna 0 och 1 på x-axeln. Trådens densitet varierar enligt formeln $\rho(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$ kg/m. Beräkna trådens massa.

Lösning: Hur man beräknar massan förklaras utförligt i kap 7.2 i Persson-Böiers. Vi får att massan m ges av

$$m = \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) dx = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

8. Bestäm värdemängden till funktionen $f(x) = \arctan(2x^2 + 1) - \arctan\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$.

Lösning: Vi ser att funktionen är kontinuerlig för alla reella x. Vi deriverarar, och får

$$f'(x) = \frac{4x}{1 + (2x^2+1)^2} - \frac{1}{1 + \frac{x^4}{(x^2+1)^2}} \cdot \frac{2x(x^2+1) - 2x^3}{(x^2+1)^2}.$$

Efter förenkling får vi att $f'(x) = 0$. Det innebär att $f(x) =$const. för alla x. Eftersom $f(0) = \arctan 1 - \arctan 0 = \pi/4$, så $f(x) = \pi/4$ för alla x.

Svar: Värdemängden av funktionen $f(x)$ består av en enda punkt $\pi/4$.

9. Avgör om den generaliserade integralen $\int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x^5 + x}} dx$ är konvergent eller divergent.

Lösning: Integralen är generaliserad på två sätt: dels avtar funktionen under integralen obegränsat när x närmar sig 0, dels är integrationsområdet obegränsat. Vi måste dela upp integrationsområdet.

Först studerar vi $I_1 = \int_1^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x^5+x}} dx$. Observera att $0 \leq \ln x < x$ för alla $x \geq 1$. Därför kan vi uppskatta för alla $x \geq 1$: $0 \leq \frac{\ln x}{\sqrt{x^5+x}} < \frac{x}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{x^{3/2}}$. Eftersom $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ konvergerar, så konvergerar också I_1.

Vidare, vet vi att $\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-1/4}} = \lim_{x\to 0} x^{1/4} \ln x = 0$ (standardgränsvärde). Det innebär att det finns ett (litet) tal $r < 1$ sådan att $|\ln x| < x^{-1/4}$ för alla $0 < x < r$. För $x < r$ kan vi uppskatta: $\frac{|\ln x|}{\sqrt{x^5+x}} < \frac{x^{-1/4}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/4}}$. Eftersom $\int_0^r \frac{dx}{x^{3/4}}$ konvergerar, konvergerar också $I_2 = \int_0^r \frac{\ln x}{\sqrt{x^5+x}} dx$.

Vi delar upp den ursprungliga integralen:

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x^5+x}} dx = \int_0^r \frac{\ln x}{\sqrt{x^5+x}} dx + \int_r^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x^5+x}} dx + \int_1^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x^5+x}} dx.$$

Integralen i mitten är inte generaliserad. Vi har visat att alla tre delintegraler ovan konvergerar, alltså konvergerar den ursprungliga integralen.