KTH Matematik

Kontrollskrivning nr. 1 i SF1644, Envariabelanalys 21/10-2009, version A.
Svar / Lösningsförslag.

Namn och personnummer:

[1.] Bestäm största och minsta värde till funktionen $p(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ i intervallet $[-2, 0]$.

Vi undersöker derivatan: $p'(x) = 3(x^2 - 2x - 3)$. Rötterna är -1 och 3. Derivatan är definierad överallt. Maximum och minimum kan antas i följande punkter i intervallet $[-2, 0]$: $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$. Vi har: $p(0) = 1$, $p(-1) = 6$ (globalt maximum), $p(-2) = -1$ (globalt minimum).

[2.] Skissera grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$.

Notera att $f(x)$ är odefinierad i punkterna $x = \pm 2$.

Derivatan: $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-4)^2}$.

$f'(x)$ är odefinierad i punkterna $x = \pm 2$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Tecknet av derivatan: $f'(x) > 0$ för $x < -2$ och $-2 < x < 0$, $f'(x) < 0$ för $0 < x < 2$ och $x > 2$. Punkten $x = 0$ ger ett lokalt maximum.

Studera gränsvärden: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$;

$\lim_{x \to -2^-} \frac{1}{x^2-4} = +\infty$ (eftersom $x^2 - 4 > 0$ då, och blir hur liten som helst), $\lim_{x \to -2^+} \frac{1}{x^2-4} = -\infty$;

Samma undersökning kring $x = 2$: $\lim_{x \to -2^+} \frac{1}{x^2-4} = +\infty$, $\lim_{x \to -2^-} \frac{1}{x^2-4} = -\infty$.

$f(0) = -\frac{1}{4}$. Rita det!

[3.] En fyr F står på en liten ö 5 km. norr om en öst-västlig strand (strandkanten är en rät linje). Punkten på stranden som är närmast fyren kallas för A. En kabel ska dras från fyren F till punkten B på stranden, som ligger 10 km. öst om A. Kabeln ska dras under vatten från F till en punkt C mellan A och B, och därifrån längs strandkanten till punkten B. Att lägga kabeln under vatten kostar 5000 SEK/km., och på land kostar det 3000 SEK/km. Hur ska C väljas för att minimera den totala kostnaden?

Låt x vara avstånd från A till C. Den totala kostnaden $T(x)$ uttrycks som

$$T(x) = 5000\sqrt{25 + x^2} + 3000(10 - x), \quad 0 \le x \le 10$$

$T'(x)$ är definierad i hela intervallet $[0, 10]$. $T'(x) = 0$ ger två värden, men bara ett i intervallet $[0, 10]$: $x = \frac{15}{4}$. Man jämför värden av T i punkter $x = 0$, $x = 10$ och $x = \frac{15}{4}$. Det är $T(\frac{15}{4}) = 50000$ som är minst av dem.