

**Kontrollskrivning nr. 1 i SF1644, Envariabelanalys 21/10-2009, version B.**

[1.] Bestäm största och minsta värde till funktionen  $p(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$  i intervallet  $[0, 2]$ .

Vi undersöker derivatan:  $p'(x) = 3(x^2 + 2x - 3)$ . Rötterna är  $-3$  och  $1$ . Derivatan är definierad överallt. Maximum och minimum kan antas i följande punkter i intervallet  $[0, 2]$ :  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ . Vi har:  $p(0) = 2$ ,  $p(1) = -3$  (globalt minimum),  $p(2) = 4$  (globalt maximum).

[2.] Skissera grafen till funktionen  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$ .

Notera att  $f(x)$  är odefinierad i punkterna  $x = \pm 3$ .

Derivatan:  $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-9)^2}$ .

$f'(x)$  är odefinierad i punkterna  $x = \pm 3$ .

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

Tecknet av derivatan:  $f'(x) > 0$  för  $x < -3$  och  $-3 < x < 0$ ,  $f'(x) < 0$  för  $0 < x < 3$  och  $x > 3$ .

Punkten  $x = 0$  ger ett lokalt maximum.

Studera gränsvärden:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ ;

$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{1}{x^2-9} = +\infty$  (eftersom  $x^2 - 9 > 0$  då, och blir hur liten som helst),  $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{1}{x^2-9} = -\infty$ ;

Samma undersökning kring  $x = 3$ :  $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{1}{x^2-9} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{1}{x^2-9} = -\infty$ .

$f(0) = -\frac{1}{9}$ . Rita det!

[3.] En fyr  $F$  står på en liten ö 3 km. norr om en öst-västlig strand (strandkanten är en rät linje). Punkten på stranden som är närmast fyren kallas för  $A$ . En kabel ska dras från fyren  $F$  till punkten  $B$  på stranden, som ligger 10 km. öst om  $A$ . Kabeln ska dras under vatten från  $F$  till en punkt  $C$  mellan  $A$  och  $B$ , och därifrån längs strandkanten till punkten  $B$ . Att lägga kabeln under vatten kostar 5000 SEK/km., och på land kostar det 3000 SEK/km. Hur ska  $C$  väljas för att minimera den totala kostnaden?

Låt  $x$  vara avstånd från  $A$  till  $C$ . Den totala kostnaden  $T(x)$  uttrycks som

$$T(x) = 5000\sqrt{9 + x^2} + 3000(10 - x), \quad 0 \leq x \leq 10$$

$T'(x)$  är definierad i hela intervallet  $[0, 10]$ .  $T'(x) = 0$  ger två värden, men bara ett i intervallet  $[0, 10]$ :  $x = \frac{9}{4}$ . Man jämför värden av  $T$  i punkter  $x = 0$ ,  $x = 10$  och  $x = \frac{9}{4}$ . Det är  $T(\frac{15}{4}) = 42000$  som är minst av dem.