

Kontrollskrivning nr. 2 i SF1644, Envariabelanalys 6/11-2009, version A.
Svar / Lösningsförslag.

1. Beräkna integralen $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$.

Vi använder substitutionen $u = \sin x$. Då $du = \cos x dx$, $x = 0 \Leftrightarrow u = 0$, $x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow u = 1$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + u^2} du = [\arctan u]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

2. Beräkna den generaliserade integralen $\int_1^3 \frac{dx}{(x-2)^{\frac{4}{5}}}$.

Integralen är generaliserad eftersom funktionen $\frac{dx}{(x-2)^{\frac{4}{5}}}$ växer obegränsat då $x \rightarrow 2$. Dela integrationsområde: $\int_1^3 \frac{dx}{(x-2)^{\frac{4}{5}}} = \int_1^2 \frac{dx}{(x-2)^{\frac{4}{5}}} + \int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^{\frac{4}{5}}} := I + II$.

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_1^{2-\varepsilon} \frac{dx}{(x-2)^{\frac{4}{5}}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[5(x-2)^{\frac{1}{5}} \right]_1^{2-\varepsilon} = 5 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (-\varepsilon)^{\frac{1}{5}} - (-1)^{\frac{1}{5}} = 5$$

På samma sätt, $II = 5$. Svar: 10.

3 a). Betrakta en solid kon med cirkulärt tvärsnitt och axeln vinkelrät mot basen. Konens höjd är $h = 6$, basens radie är $R = 3$. Man skär av övre halvan av konen. Det som blir kvar är en kropp med höjd 3 (se bilden). Beräkna kroppens volym.

b. I detta exempel, förklara hur man beräknar volymen av en rotationskropp.

a). Låt konens axel ligga längs x -axeln. Betrakta linjen som går genom punkter $(0, 3)$ och $(6, 0)$. Denna linje har ekvation $y = f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$. Vi får kroppen ovan om vi roterar (kring x -axeln) området mellan x -axeln och linjen (dvs grafen av $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$) för $x \in [0, 3]$.

Volymen är $V = \pi \int_0^3 (3 - \frac{1}{2}x)^2 dx = \frac{63}{4}\pi$.

Fråga 3 b).—se boken eller föreläsninganteckningar.