KTH Matematik

Kontrollskrivning nr. 2 i SF1644, Envariabelanalys 6/11-2009, version B.
Svar / Lösningsförslag.

1. Beräkna integralen $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

Vi använder substitutionen $u = \cos x$. Då $du = -\sin x dx$, $x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow u = 0$, $x = 0 \Leftrightarrow u = 1$.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}du = -[\arctan u]_0^1 = -\frac{\pi}{4}.$$

2. Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{5}}}$.

Integralen är generaliserad eftersom funktionen $\frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{5}}}$ växer obegränsat då $x \to 1$. Dela integrationsområde: $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{5}}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{5}}} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{5}}} := I + II$.

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{5}}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{5}{3}(x-1)^{\frac{3}{5}}\right]_0^{1-\varepsilon} = \frac{5}{3} \lim_{\varepsilon \to 0^+} (-\varepsilon)^{\frac{3}{5}} - (-1)^{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

På samma sätt, $II = \frac{5}{3}$. Svar: $\frac{10}{3}$.

3 a). Betrakta en solid kon med cirkulärt tvärsnitt och axeln vinkelrät mot basen. Konens höjd är $h = 4$, basens radie är $R = 2$. Man skär av övre halvan av konen. Det som blir kvar är en kropp med höjd 2 (se bilden). Beräkna kroppens volym.

b. I detta exempel, förklara hur man beräknar volymen av en rotationskropp.

a). Låt konens axel ligga längs x-axeln. Betrakta linjen som går genom punkter $(0, 2)$ och $(4, 0)$. Denna linje har ekvation $y = f(x) = 2 - \frac{1}{2}x$. Vi får kroppen ovan om vi roterar (kring x-axeln) området mellan x-axeln och linjen (dvs grafen av $f(x) = 2 - \frac{1}{2}x$) för $x \in [0, 2]$.

Volymen är $V = \pi \int_0^2 (2 - \frac{1}{2}x)^2 dx = \frac{19}{12}\pi$.

Fråga 3 b).—se boken eller föreläsningsanteckningar.