

## Tentamen i SF1644, Analys i en variabel 7/12-2009

### Namn och personnummer:

Uppgifterna poängsätts med 4 poäng vardera. Uppgifterna 1 - 3 svarar mot kontrollskrivningar. Den som är godkänd på kontrollskrivning nummer  $k$  har automatiskt 4 poäng på uppgift nummer  $k$ ,  $k = 1, 2$  eller 3, som då inte ska lösas. Varje 2 godkända hemuppgifter ger 1 bonuspoäng till tentamen. För högre betyg krävs att man samlar en del poäng på uppgifterna 7-10, s k VG-poäng. Preliminära betygsgränser: A: 31 poäng varav minst 11 VG-poäng, B: 26 poäng varav minst 7 VG-poäng, C: 21 poäng varav minst 3 VG-poäng, D: 18 poäng, E: 16 poäng, FX: 14 poäng.

### G-uppgifter

1. Bestäm i förekommande fall största och minsta värdet till funktionen  $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{3}$  på intervallet  $[-1, 1]$ . Besvara sedan samma fråga för det öppna intervallet  $(-1, 1)$ .

*Lösning.* En kontinuerlig funktion på ett slutet och begränsad intervall antar sitt största och minsta värde. De antas i intervallets ändpunkter eller i punkter där derivatan är 0, eller i punkter där derivatan är odefinierad.  $f'(x) = x^4 - 2x^5 = x^4(1 - 2x)$ . Derivatan är definierad överallt.  $f'(x) = 0$  för  $x = 0$  och  $x = 1/2$ . Jämför värden:  $f(-1) = -8/15$ ,  $f(1) = -2/15$ ,  $f(1/2) = 1/960 > 0$ ,  $f(0) = 0$ . Största värdet:  $f(1/2) = 1/960$  och minsta värdet:  $f(-1) = -8/15$ . På det öppna intervallet  $(-1, 1)$  största värdet är samma som ovan, minsta värdet saknas.

2. Använd partialbråksuppdelning för att bestämma samtliga primitiva funktioner till  $\frac{x+1}{x^2-5x+6}$ .

*Lösning.* Ansats:  $\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$ . Skriver om uttrycket ovan till samma nämnare, och bestämmer konstanterna:  $A = -3$ ,  $B = 4$ .

$$\int \frac{x+1}{x^2-5x+6} = \int \frac{-3}{x-2} + \frac{4}{x-3} = -3 \ln(x-2) + 4 \ln(x-3) + C$$

där  $C$  är en godtycklig konstant.

3. Bestäm det andragradspolynom som bäst approximerar funktionen  $f(x) = x \sin x$  kring punkten  $x = \frac{\pi}{2}$ .

*Lösning.* Det sökta polynomet är Taylorpolynom  $p(x) = f(\frac{\pi}{2}) + f'(\frac{\pi}{2})(x - \frac{\pi}{2}) + f''(\frac{\pi}{2})(x - \frac{\pi}{2})^2$ . Vi har:

$$p(x) = \frac{\pi}{2} + (x - \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{4}\pi(x - \frac{\pi}{2})^2 = x - \frac{1}{4}\pi(x - \frac{\pi}{2})^2$$

4. Låt  $g(x)$  vara en kontinuerlig funktion som uppfyller  $\int_2^6 g(x)dx = 4$ ,  $\int_6^{10} g(x)dx = -1$ . Beräkna

a).  $\int_2^{10} -3g(x)dx = -3 \left( \int_2^6 g(x)dx + \int_6^{10} g(x)dx \right) = -3(4 - 1) = -9$ ;

b).  $\int_1^3 g(2x)dx = [u = 2x, du = 2dx; x = 1 \Leftrightarrow u = 2, x = 3 \Leftrightarrow u = 6] = \frac{1}{2} \int_2^6 g(u)du = \frac{1}{2}4 = 2$ .

$$c). \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} \sin(2x) dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(u) du = \frac{1}{2} [-\cos u]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}.$$

5. Betrakta differentialekvationen  $y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 5 \sin x$ .

a). Verifiera att  $y(x) = \sin x - 2 \cos x$  är en lösning till differentialekvationen;

b). Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen;

*Lösning.* Den karakteristiska ekvationen  $r^2 + 2r + 2 = 0$  har rötter  $r = -1 \pm i$ . Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är  $y_H(x) = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ . Observera att en partikulär lösning till den ursprungliga icke-homogena ekvationen är given ovan:  $y_p(x) = \sin x - 2 \cos x$ . Den allmänna lösningen till differentialekvationen är

$$y(x) = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \sin x - 2 \cos x.$$

c). Beskriv alla lösningar till denna ekvation som uppfyller  $y(0) = 0$ .

Insättning  $y(0) = (C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + \sin 0 - 2 \cos 0 = C_1 - 2 = 0$  medför:  $C_1 = 2$ . Alla lösningar som uppfyller  $y(0) = 0$  beskrivs därför av

$$y(x) = e^{-x}(2 \cos x + C_2 \sin x) + \sin x - 2 \cos x.$$

6 a). Förklara varför volymen av den kropp som uppstår då området mellan kurvan  $y = f(x)$  och  $x$ -axeln,  $a \leq x \leq b$ , roterar kring  $x$ -axeln ges av formeln  $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$ .

Se Persson och Böjers.

b). Använd formeln ovan för att beräkna volymen som uppstår då området mellan kurvan  $y = \cos x$  och  $x$ -axeln,  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  roterar kring  $x$ -axeln.

*Lösning.* Insättning i formeln ovan ger:

$$V = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

7. I en behållare finns 100 liter vatten i vilken  $Y_0 = 500$  gram salt lösts upp. Vid en viss tidpunkt börjar behållaren fyllas på med vätska i takt av 4 liter per minut, där varje liter innehåller 5 gram salt. Samtidigt tappas den väl blandade vätskan i behållaren ut i takt av 4 liter per minut. Följande matematiska modell har föreslagits för att beskriva förloppet: om  $y(t)$  betyder mängden salt i behållaren vid tidpunkten  $t$  minuter efter kranerna öppnats, så gäller att

$$y'(t) = 20 - \frac{1}{25}y(t).$$

a). Lös begynnelsevärdesproblemet ovan.

*Lösning.* Begynnelsevärdet är  $y(0) = 500$ . Ekvationen har form  $y'(t) + \frac{1}{25}y(t) = 20$ . Multiplisera ekvationen med en integrerande faktor  $e^{\int \frac{1}{25} dx} = e^{\frac{1}{25}x}$ :

$$\left(y(t)e^{\frac{1}{25}x}\right)' = 20e^{\frac{1}{25}x}.$$

Då

$$y(t)e^{\frac{1}{25}x} = \int 20e^{\frac{1}{25}x} dx = 500e^{\frac{1}{25}x} + C$$

där  $C$  är en godtycklig konstant. Alla lösningar beskrivs av

$$y(t) = 500 + Ce^{-\frac{1}{25}x}$$

där  $C$  är en godtycklig konstant.

Begynnelldata ger:  $500 = y(0) = 500 + Ce^0$ . Vi måste ha  $C = 0$ . Lösningen till begynnelsevärdesproblemet ges därför av

$$y(t) = 500.$$

(Tänk på att saltlösningen kommer in med koncentration 5 gram salt per liter, och koncentrationen av salt i behållaren vid tid 0 var också  $\frac{500}{100} = 5$  gram salt per liter. Det är naturligt att koncentrationen av salt inte förändras med tiden, och därför  $y(t) = 500 = \text{konstant}$ .)

b). Hur mycket salt skulle vara i behållaren vid tid  $t = 0$  (dvs, hur skulle  $Y_0$  väljas) för att motsvarande begynnelsevärdesproblemet hade en konstant lösning?

Svar: Man ska ta  $Y_0 = 500$  gram salt.

8. Funktionen  $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$  är inte definierad i en viss punkt. Kan man definiera funktionen  $f(x)$  i denna punkt så att den blir kontinuerlig överallt? Hur gör man det i så fall? Motivera ditt svar!

Lösning. Funktionen  $f(x)$  är inte definierad i punkt  $x = 0$ , men kontinuerlig i alla andra punkter.

Vi säger att en funktion  $g(x)$  är kontinuerlig i punkt 0 om  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  finns och är lika med  $g(0)$ .

Verifierar att  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  finns:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - \frac{1}{2}x^2 + B(x)x^4)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} + B(x)x^2 = \frac{1}{2}.$$

Här  $B(x)$  är en begränsad funktion.

Låt oss definiera  $f(0) = \frac{1}{2}$ . Med andra ord, vi betraktar funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & \text{om } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{om } x = 0. \end{cases}$$

Denna funktion är kontinuerlig överallt.

9. Förklara i vilken mening  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx$  är en generaliserad integral. Beräkna integralen med hjälp av substitutionen  $u = 1 - \sin x$ .

Lösning. Integralen är generaliserad eftersom funktionen  $\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}$  är obegränsad då  $x \rightarrow 0$ . Substitutionen  $u = 1 - \sin x$  ger:  $du = -\cos x dx$ ,  $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow u \rightarrow 1$ ,  $x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow u = 0$ .

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx = - \int_1^0 \frac{du}{\sqrt{u}} = \int_0^1 u^{-1/2} du = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 u^{-1/2} du = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 2[\sqrt{u}]_{\varepsilon}^1 = 2.$$

10. a). Använd Cauchys Integralkriterium för att visa att serien  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^5}$  konvergerar.

Lösning. Cauchys Integralkriterium säger att summan ovan och integralen  $\int_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^5} dx$  konvergerar eller divergerar samtidigt. Vi beräknar

$$\int_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^5} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{k=1}^M \frac{1}{x^5} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{4M^4} + \frac{1}{4} \right) = 1/4.$$

Denna integral konvergerar.

b). Använd t. ex. uppskattning av summor med integraler för att finna minsta antal termer i serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^5} \text{ som behövs för att approximera summan med ett fel } \leq \frac{1}{4} 10^{-4}.$$

*Lösning.* Observera att för varje  $n$  gäller:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^5} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^5} + \int_{k=n}^{\infty} \frac{1}{x^5} dx.$$

(Gör en bild). Det vill säga att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^5} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^5} \leq \int_{k=n}^{\infty} \frac{1}{x^5} dx.$$

Vi räknar som i punkt a):  $\int_{k=n}^{\infty} \frac{1}{x^5} dx = \frac{1}{4n^4}$ . För att denna integral vore  $\leq \frac{1}{4}10^{-4}$  vi kan ta  $n \geq 10$  (10 är minsta möjliga  $n$ ). Det räker alltså att ta summan av 10 första termer av vår serie för att approximera summan med det önskade fellet.