KTH Matematik
Examinator Maria Saprykina

Tentamen i SF1644, Analys i en variabel 2 juni 2010
Lösningsförslag.

Uppgifterna poängsätts med 4 poäng vardera. Uppgifterna 1 - 3 svarar mot kontrollskrivningar. Den som är godkänd på kontrollskrivning nummer k har automatiskt 4 poäng på uppgift nummer k, $k = 1, 2$ eller 3, som då inte ska lösas. Varje 2 godkända hemuppgifter ger 1 bonuspoäng till tentamen. För högre betyg krävs att man samlar en del poäng på uppgifterna 7-10, s k VG-poäng. Preliminära betygsgränser: A: 31 poäng varav minst 11 VG-poäng, B: 26 poäng varav minst 7 VG-poäng, C: 21 poäng varav minst 3 VG-poäng, D: 18 poäng, E: 16 poäng, FX: 14 poäng.

Kompletteringen äger rum den 18 juni. Skriv till kursledaren för att registrera dig.

G-uppgifter

1. Bestäm alla lokala extrempunkter till $f(x) = xe^{-x^2}$ och gör en skiss av kurvan $y = f(x)$. Bestäm sedan också värdemängden till funktionen f.

Lösning. Det enda nollställe är $x = 0$. Söker extrempunkter: $f'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Eftersom $e^{-x^2} > 0$ för alla x, så har $f'(x)$ samma tecken som $1 - 2x^2$. $f'(x) < 0$ för $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ eller $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$, och $f'(x) > 0$ för $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Funktionen avtar i intervallen $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ och $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$, och växer i intervallet $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. I punkten $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ antas (den globala) maximum, $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{\sqrt{2e}}$. I $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ antas (den globala) minimum, $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2e}}$. Undersöker beteende i oändligheten: $\lim_{x\to-\infty} xe^{-x^2} = \lim_{x\to\infty} xe^{-x^2} = 0$. Skissa grafen! Man kunde observera att funktionen är udda, dvs $f(-x) = -f(x)$, det skulle spara lite arbete.

Eftersom funktionen är kontinuerlig, så antar den alla värden mellan dess största och minsta värde. Värdemängden är $\left[-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right]$.

2. Använd variabelsubstitution $t = 1 + \sin x$ för att beräkna $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$.

Lösning. Sätt $t = 1 + \sin x$. Då $dt = (1 + \sin x)'dx = \cos x dx$. Vidare, $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = \pi/2 \Rightarrow t = 2$. Integralen ovan skrivs om som

$$\int_1^2 \frac{dt}{t} = [\ln|t|]_1^2 = \ln 2.$$

3. *Lösning.* Vi använder MacLaurins formel:

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin 3x + xe^x}{2x} = \lim_{x\to0} \frac{3x + B_1(x)x^3 + x + B_2(x)x^2}{2x} = \lim_{x\to0} \frac{3 + B_1(x)x^2 + 1 + B_2(x)x}{2} = 2.$$

$B_1(x)$ och $B_2(x)$ är begränsade funktioner av x för x nära 0.

4 a). Lös differentialekvationen

$$y''(t) - y'(t) - 6y(t) = e^{-t}.$$

b). Bestäm den lösningen till ekvationen ovan som uppfyller: $y(t) \to 0$ då $t \to \infty$, och $y(0) = 1$.

Lösning. a). Först löser vi den homogena ekvationen. Den karakteristiska ekvationen $r^2 - r - 6 = 0$ har rötter $r = -2$ och $r = 3$. Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är $y_h(t) = Ae^{3t} + Be^{-2t}$.

Söker en partikulär lösning. Eftersom den inhomogena delen är $4e^{-t}$, ansätter vi $y_p(t) = ae^{-t}$ med en obestämd konstant a, och säter in i ekvationen. Vi får $(a + a - 6a)e^{-t} = e^{-t} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow y_p(t) = -\frac{1}{4}e^{-t}$. Den allmänna lösningen till den ursprungliga ekvationen är

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ae^{3t} + Be^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-t}.$$

b). Villkoret $y(t) \to 0$ då $t \to \infty$ är uppfylld om och endast om $A = 0$. Sätter in $y(0) = 1$: $y(0) = B - \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow B = \frac{5}{4}$. Svar till b): $y(t) = \frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-t}$.

5. Bestäm volymen av den kropp som uppstår då (det begränsade) området mellan kurvorna $y = 2 - x^2$ och $y = 1$ roterar kring $x-$axeln.

Lösning. Kurvorna skär varandra i punkter $x = -1$ och $x = 1$ (rita figuren!).

När området mellan kurvorna roterar kring $x-$axeln, uppstår det en kropp som liknar ett rör. När vi skär röret med ett plan $x = x_0$, $-1 \leq x_0 \leq 1$, får vi ett ringformad område. Den inre radien är $r = 1$, den yttre radien är $R = 2 - x_0^2$. Arean av området beräknas till

$$A_{x_0} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(2 - x_0^2)^2 - \pi = \pi(x_0^4 - 4x_0^2 + 3).$$

För att beräkna kroppens volum, integrera A_x med avseende på x (justifiera gärna detta med hjälp av Riemannsummor):

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (x_0^4 - 4x_0^2 + 3)dx = \frac{56}{15}\pi$$

6. Avgör om de generaliserade integralerna nedan är konvergenta. Ange deras värde om möjligt.

Lösning. a). Funktionen $\frac{1}{\sqrt{x}}$ går mot oändligheten då $x \to 0^+$. Enligt definitionen av generaliserad integral,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} 2(1 - \sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

b). $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{(x - \sqrt{x})^{1/3}}$.

Observera att funktionerna $\frac{1}{(x-\sqrt{x})^{1/3}}$ och $\frac{1}{x^{1/3}}$ är positiva för alla $x \geq 2$, och för alla $x \geq 2$ gäller

$$\frac{1}{x^{1/3}} < \frac{1}{(x - \sqrt{x})^{1/3}}.$$

Analys som ovan visar att $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^{1/3}}$ divergerar. Enligt Jämförelsesatsen, divergerar integralen i b) också.

7. Vi betraktar en elektrisk krets som består av en spänningskälla E, en resistans R och en induktans L (E, R och L är konstanter). Strömmen genom kretsen är en funktion av tiden, t. Om vi betecknar strömmen med i så gäller att $E = Ri + L\frac{di}{dt}$. Om dessutom $i(0) = 0$, beräkna $i(t)$.

Lösning. Man kan se ekvationen $Li'(t) + Ri(t) = E$ som en (första ordningens) linjär ekvation med konstanta koefficienter. Vi ska först lösa den homogena ekvationen $Li'(t) + Ri(t) = 0$. Karakteristiska ekvationen är $Lx + R = 0$. Detta ger $x = -\frac{R}{L}$. Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är $i_H = Ce^{-\frac{R}{L}t}$, där C är en godtycklig konstant.

Vi söker en partikulär lösning till den ursprungliga icke-homogena ekvationen på formen $i_p = a$, a är konstant. Sätter in i ekvationen: $Ra = E$. Vi fick $i_p = a = \frac{E}{R}$.

Den allmänna lösningen den ursprungliga ekvationen är alltså

$$i(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R},$$

där C är en godtycklig konstant.

OBS: Man kunde också använda integrerande faktor för att lösa denna ekvation.

Söker konstanten C sådan att $i(0) = 0$: $i(0) = C + \frac{E}{R} = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{E}{R}$. Den sökta lösningen är $i(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$.

8. Hur många reella lösningar har ekvationen $x^5 + x^3 + x - 1 = 0$? Bestäm ett interval av längd 1/2 som innehåller en rot.

Lösning. Bertakta polynomet $p(x) = x^5 + x^3 + x - 1$. Eftersom $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$, och funktionen $p(x)$ är kontinuerlig, så måste $p(x)$ anta alla reella värden. Därför har ekvationen $p(x) = 0$ minst en lösning.

Om vi deriverar polynomet $p(x)$, får vi att $p(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ för alla x, dvs $p(x)$ växer för alla x. Därför har ekvationen $p(x) = 0$ presis en lösning.

Observera att $p(0) = -1 < 0$, och $p(1) = 2 > 0$. Eftersom $p(x)$ är kontinuerlig, så antar den alla värden mellan -1 och 2. Därför ligger roten till $p(x)$ i intervallet $[0, 1]$. För att lokalisera roten bättre, beräkna $p(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2} - 1 < 0$ (visa!). Därför ligger roten till p i intervallet $[\frac{1}{2}, 1]$.

9. Finns det ett tal $x < 1$ sådan att

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \ln x > 1000 \ ?$$

Lösning. Observera att olikheten ovan har mening bara för $x > 0$. Betrakta funktionen $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \ln x$. Vi ska undersöka värdemängden av $f(x)$ för $0 < x < 1$ och se om denna innehåller något tal som är > 1000. Eftersom

$$f'(x) = -\frac{1}{2x^{3/2}} + \frac{1}{x} < 0 \ \text{ för alla } \ 0 < x < 1,$$

är funktionen avtagande. Observera att

$$\lim_{x\to1} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \ln x \right) = 1.$$

Det återstår att beräkna $\lim_{x\to0^+}(\frac{1}{\sqrt{x}} + \ln x)$. Det är summa av två termer varav en går mot $+\infty$ och den andra mot $-\infty$ då $x \to 0$. Skriv om:

$$\lim_{x\to0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \ln x \right) = \lim_{x\to0^+} \frac{1 + \sqrt{x}\ln x}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Detta följer från standardgränsvärdet: $\lim_{x\to0^+} \sqrt{x}\ln x = 0$.

Därför måste funktionen $\frac{1}{\sqrt{x}} + \ln x$ anta (faktiskt, alla) värden > 1000.

10. Använd Cauchys Integralkriterium för att

a). visa att serien $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{e^k}$ konvergerar.

b). visa att $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{e^k} \le \frac{2}{e}$.

Lösning. Om funktionen $f(x)$ är kontinuerlig, positiv och avtagande för $x \ge 1$, så säger Cauchys Integralkriterium att serien $\sum_{k=2}^{\infty} f(x)$ och integralen $\int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergerar eller divergerar samtidigt. Vidare (detta behövs för b)–delen) har vi:

$$\sum_{k=2}^{\infty} f(x) \le \int_1^{\infty} f(x)dx \tag{1}$$

(förklara gärna detta med en bild!)

Betrakta funktionen $f(x) = \frac{x}{e^x}$. För $x \ge 1$ är den kontinuerlig och positiv. Verifiera att den är avtagande: $f'(x) = (1-x)e^{-x} \le 0$ för alla $x \ge 1$. Enligt Cauchys Integralkriterium,

$$\int_1^{\infty} xe^{-x}dx = \left[-(x+1)e^{-x}\right]_1^{\infty} =$$

$$\lim_{M\to\infty} \left[-(x+1)e^{-x}\right]_1^{M} = 2e^{-1}.$$

Därför konvergerar serien i a) också. Formeln ovan, tillsammans med (1), medför uppskattningen i b).