KTH Matematik
Olle Stormark

Lösningsföslag till KS 1A

i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CELTE, vt 2010.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Beräkna det arbete som kraften $\boldsymbol{F} = (xy, y, -yz)$ uträttar längs kurvan C, given av $\boldsymbol{r} = (x, y, z) = (t, t^2, t)$, där $t\colon 0 \to 1$.

   Lösning:

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_{t=0}^{1} (t^3, t^2, -t^3) \cdot (1, 2t, 1)\, dt \\ &= \int_0^1 (t^3 + 2t^3 - t^3)\, dt = 2\int_0^1 t^3\, dt = \frac{2}{4}\big[t^4\big]_0^1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2. Låt $\mathcal{D}$ vara halvrummet $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon y > 0\}$, och låt

$$\boldsymbol{F} = \left(3x^2, \frac{z^2}{y}, 2z \ln y\right) \text{ i } \mathcal{D}.$$

   (a) Visa att $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ i $\mathcal{D}$.

   Lösning:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \boldsymbol{F} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 3x^2 & z^2 y^{-1} & 2z \ln y \end{vmatrix} = \left(\frac{2z}{y} - \frac{2z}{y}, 0 - 0, 0 - 0\right) \\ &= \boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

(b) Eftersom $\mathcal{D}$ är enkelt sammanhängande följer det från (a) att $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad}\phi$ för en potentialfunktion ϕ. Bestäm ett sådant ϕ.

Lösning:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\phi}{\partial x} = 3x^2 \Longrightarrow \phi = x^3 + g(y,z) \Longrightarrow \\
&\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = z^2y^{-1} \Longrightarrow g = z^2\ln y + h(z) \Longrightarrow \\
&\phi = x^3 + z^2\ln y + h(z) \Longrightarrow \\
&\frac{\partial\phi}{\partial z} = 2z\ln y + h'(z) = 2z\ln y \Longrightarrow h(z) = C \Longrightarrow \phi = x^3 + z^2\ln y + C.
\end{aligned}$$

(c) Låt C vara en kurva som går från $(1,1,1)$ till $(1,2,3)$ i $\mathcal{D}$. Beräkna linjeintegralen

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}
\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_C \text{grad } \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)} d\phi \\
&= \phi(1,2,3) - \phi(1,1,1) = 1 + 9\ln 2 - 1 = 9\ln 2.
\end{aligned}$$

3. Låt ϕ vara en funktion och $\boldsymbol{F}$ ett vektorfält. Använd indexräkning för att visa att

$$\operatorname{rot}(\phi\,\boldsymbol{F}) = \operatorname{grad}\phi \times \boldsymbol{F} + \phi \operatorname{rot}\boldsymbol{F}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}
&[\nabla \times (\phi\boldsymbol{F})]_i = \epsilon_{ijk}\,\frac{\partial}{\partial x_j}(\phi F_k) = \epsilon_{ijk}\,\frac{\partial\phi}{\partial x_j}F_k + \phi\,\epsilon_{ijk}\,\frac{\partial F_k}{\partial x_j} \\
&= [\nabla\phi \times \boldsymbol{F} + \phi\,\nabla \times \boldsymbol{F}]_i \quad \text{för} \quad i = 1,2,3 \Longrightarrow \\
&\operatorname{rot}(\phi\boldsymbol{F}) = \text{grad }\ \phi \times \boldsymbol{F} + \phi \operatorname{rot}\ \boldsymbol{F}.
\end{aligned}$$

Lycka till!
Olle.