KTH Matematik
Olle Stormark

Lösningsförslag till KS 1B

i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CELTE, vt 2010.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Beräkna det arbete som kraften $\boldsymbol{F} = (x, y, z)$ uträttar längs kurvan C, given av $\boldsymbol{r} = (x, y, z) = (\cos \pi t, t^2, \sin \pi t)$, där $t\colon 0 \to 1$.

   Lösning:

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_{t=0}^{1} (\cos \pi t, t^2, \sin \pi t) \cdot (-\pi \sin \pi t, 2t, \pi \cos \pi t)\, dt \\ &= \int_0^1 (-\pi \cos \pi t \sin \pi t + 2t^3 + \pi \sin \pi t \cos \pi t)\, dt = 2 \int_0^1 t^3\, dt \\ &= \frac{2}{4}\big[t^4\big]_0^1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2. Låt $\mathcal{D}$ vara kvartsrummet $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon y > 0, z > 0\}$, och låt

$$\boldsymbol{F} = \left(\frac{1}{y}, \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}, -\frac{y}{z^2}\right) \text{ i } \mathcal{D}.$$

   (a) Visa att $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ i $\mathcal{D}$.

   Lösning:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \boldsymbol{F} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^{-1} & z^{-1} - xy^{-2} & -yz^{-2} \end{vmatrix} = (-z^{-2} + z^{-2}, 0 - 0, -y^{-2} + y^{-2}) \\ &= \boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

(b) Eftersom $\mathcal{D}$ är enkelt sammanhängande följer det från (a) att $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} \phi$ för en potentialfunktion ϕ. Bestäm ett sådant ϕ.

Lösning:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} == \frac{1}{y} \Longrightarrow \phi = \frac{x}{y} + g(y,z) \Longrightarrow$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2} \Longrightarrow g = \frac{y}{z} + h(z) \Longrightarrow$$
$$\phi = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + h(z) \Longrightarrow$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} + h'(z) = -\frac{y}{z^2} \Longrightarrow h(z) = C \Longrightarrow \phi = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + C.$$

(c) Låt C vara en kurva som går från $(1,1,1)$ till $(2,2,2)$ i $\mathcal{D}$. Beräkna linjeintegralen

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_C \operatorname{grad}\ \phi \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} d\phi \\ &= \phi(2,2,2) - \phi(1,1,1) = 2 - 2 = 0.\end{aligned}$$

3. Låt $\boldsymbol{F}$ och $\boldsymbol{G}$ vara vektorfält. Använd indexräkning för att visa att

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G} - \boldsymbol{F} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{G}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) &= \frac{\partial}{\partial x_i}(\epsilon_{ijk} F_j G_k) = \epsilon_{ijk} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} G_k + \epsilon_{ijk} F_j \frac{\partial G_k}{\partial x_i} \\ &= \left(\epsilon_{kij} \frac{\partial F_j}{\partial x_i}\right) G_k - \left(\epsilon_{jik} \frac{\partial G_k}{\partial x_i}\right) F_j = (\operatorname{rot} \boldsymbol{F})_k G_k - (\operatorname{rot} \boldsymbol{G})_j F_j \\ &= \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G} - \operatorname{rot} \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{F}.\end{aligned}$$

Lycka till!
Olle.