KTH Matematik
Olle Stormark

Lösningsförslag till KS 2A

i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CELTE, vt 2010.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Låt $\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 4x^2 + y^2 = 4, z = 0\}$ och låt $\boldsymbol{F} = (2x, x^2, z^2)$. Använd Stokes' sats för att beräkna linjeintegralen

$$\oint_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r},$$

där γ genomlöps motsols sett uppifrån z-axeln.

Lösning:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2x & x^2 & z^2 \end{vmatrix} = (0, 0, 2x).$$

Om Σ är ellipskivan $\{4x^2 + y^2 \leq 4\}$ i xy-planet, så är $\gamma = \partial\Sigma$ och $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_z$, och enligt Stokes är då

$$\begin{aligned} \oint_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} &= \iint_\Sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_z \, dS = \iint_\Sigma 2x \, dxdy \\ &= \int_{y=-2}^{2} \left(\int_{x=-\sqrt{4-y^2}/2}^{\sqrt{4-y^2}/2} 2x \, dx \right) dy = 0, \end{aligned}$$

ty en udda funktion integrerad över ett symmetriskt intervall ger integralen 0.

2. Låt $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 2\}$, låt $\partial\Omega$ vara Ω:s randyta med den utåtriktade enhetsnormalen $\boldsymbol{n}$, och låt $\boldsymbol{F} = r\,\boldsymbol{r}$, där $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$ och $r = |\boldsymbol{r}|$. Använd divergenssatsen för att beräkna flödesintegralen

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS.$$

Lösning:

$$\boldsymbol{F} = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}\,(x,y,z) = (F_x, F_y, F_z) \Longrightarrow$$

$$\partial F_x/\partial x = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} \cdot 2x \cdot x + (x^2+y^2+z^2)^{1/2} = \frac{x^2}{r} + r \Longrightarrow$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \partial F_x/\partial x + \partial F_y/\partial y + \partial F_z/\partial z = \frac{x^2+y^2+z^2}{r} + 3r = 4r \Longrightarrow$$

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dV = \int_{r=1}^{\sqrt{2}} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} 4r \cdot r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\phi$$

$$= \left[r^4\right]_1^{\sqrt{2}} \cdot [-\cos\theta]_0^{\pi} \cdot 2\pi = 3 \cdot 2 \cdot 2\pi = 12\pi.$$

3. Beräkna rotationen av var och en av de cylindriska basvektorerna $\boldsymbol{e}_\rho$, $\boldsymbol{e}_\phi$ och $\boldsymbol{e}_z$ (med BETAs beteckningar; Matthews skriver R i stället för ρ).

Lösning: $\boldsymbol{F} = F_\rho\, \boldsymbol{e}_\rho + F_\phi\, \boldsymbol{e}_\phi + F_z\, \boldsymbol{e}_z \Longrightarrow$

$$\operatorname{rot}\ \boldsymbol{F} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \rho\, \boldsymbol{e}_\phi & \boldsymbol{e}_z \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\phi & \partial/\partial z \\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z \end{vmatrix}.$$

$$F_\rho = 1,\ F_\phi = F_z = 0 \Longrightarrow \operatorname{rot} \boldsymbol{e}_\rho = \boldsymbol{0},$$

$$F_\rho = 0,\ F_\phi = 1,\ F_z = 0 \Longrightarrow \operatorname{rot} \boldsymbol{e}_\phi = \frac{1}{\rho}\, \boldsymbol{e}_z,$$

$$F_\rho = F_\phi = 0,\ F_z = 1 \Longrightarrow \operatorname{rot} \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{0}.$$