KTH Matematik
Olle Stormark

Lösningsförslag till KS 2B

i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CELTE, vt 2010.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Låt γ vara skärningen mellan halvsfären $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 16, z \geq 0\}$ och cylindern $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 4\}$, och låt $\boldsymbol{F} = (y^2 + z^2, x^2 + y^2, x^2 + y^2)$. Använd Stokes' sats för att beräkna linjeintegralen

$$\oint_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r},$$

där γ genomlöps motsols sett uppifrån z-axeln.

Lösning:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2 + z^2 & x^2 + y^2 & x^2 + y^2 \end{vmatrix} = (2y, 2z - 2x, 2x - 2y).$$

Om Σ är cirkelskivan $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 4,\ z = 2\sqrt{3}\}$, så är $\gamma = \partial\Sigma$ och $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_z$, och enligt Stokes är då

$$\oint_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_\Sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = 2 \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (x - y)\, dxdy = 0$$

av symmetriskäl (eller med hjälp av polära koordinater).

2. Låt $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$, låt $\partial\Omega$ vara Ω:s randyta med den utåtriktade enhetsnormalen $\boldsymbol{n}$, och låt $\boldsymbol{F} = (x^2, -2xy, 3xz)$. Använd divergenssatsen för att beräkna flödesintegralen

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS.$$

Lösning: $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 2x - 2x + 3x = 3x \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dV = \iiint_{\Omega} 3x\, dV \\
&= \int_{r=0}^{2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{\pi/2} 3r \sin\theta \cos\phi \cdot r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\phi \\
&= \frac{3}{4} \big[r^4\big]_0^2 \cdot \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta \cdot [\sin\phi]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{3}{4} \cdot 4^2 \cdot \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} \cdot 1 = 3 \cdot 4 \cdot \frac{\pi}{4} = 3\pi.
\end{aligned}$$

3. Beräkna rotationen av var och en av de sfäriska basvektorerna $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ och $\boldsymbol{e}_\phi$.

Lösning: $\boldsymbol{F} = F_r\, \boldsymbol{e}_r + F_\theta\, \boldsymbol{e}_\theta + F_\phi\, \boldsymbol{e}_\phi \Longrightarrow$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\,\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\phi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\phi \\ F_r & r\,F_\theta & r\sin\theta\, F_\phi \end{vmatrix}$$

$F_r = 1,\ F_\theta = F_\phi = 0 \Longrightarrow \operatorname{rot} \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{0}$,

$F_r = 0,\ F_\theta = 1,\ F_\phi = 0 \Longrightarrow \operatorname{rot} \boldsymbol{e}_\theta = \dfrac{1}{r}\, \boldsymbol{e}_\phi$,

$F_r = F_\theta = 0,\ F_\phi = 1 \Longrightarrow \operatorname{rot} \boldsymbol{e}_\phi = \dfrac{r\cos\theta\, \boldsymbol{e}_r - r\sin\theta\, \boldsymbol{e}_\theta}{r^2 \sin\theta} = \dfrac{\cot\theta}{r}\, \boldsymbol{e}_r - \dfrac{1}{r}\, \boldsymbol{e}_\theta.$