KTH Matematik
Olle Stormark

Lösningsförslag till KS 3A

i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CELTE, vt 2010.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Bestäm alla värden av $(-1+i\sqrt{3})^i$, och ange dem på formen $a+ib$, där a och b är reella tal.

   Lösning:

   $$-1+i\sqrt{3} = 2\cdot e^{i2\pi/3} \Longrightarrow \log(-1+i\sqrt{3}) = \ln 2 + i(2\pi/3 + n\cdot 2\pi)$$
   $$\Longrightarrow (-1+i\sqrt{3})^i = e^{i\log(-1+i\sqrt{3})} = e^{i\ln 2 - 2\pi/3 - n\cdot 2\pi} =$$
   $$= e^{-2\pi/3 - n\cdot 2\pi}\cdot\cos(\ln 2) + i\, e^{-2\pi/3-n\cdot 2\pi}\cdot\sin(\ln 2),\ \text{där } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

2. Visa direkt från definitionen av $\sin z$ respektive $\cos z$ att

   $$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z.$$

   Lösning:

   $$\begin{aligned}\cos^2 z - \sin^2 z &= \left(\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})\right)^2 - \left(\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})\right)^2\\ &= \frac{1}{4}(e^{2iz}+2+e^{-2iz}+e^{2iz}-2+e^{-2iz}) = \frac{1}{2}(e^{2iz}+e^{-2iz})\\ &= \cos 2z.\end{aligned}$$

3. Bestäm bilden av halvbandet $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z > 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi/2\}$ under avbildningen $w = e^z$.

   Lösning: $w = e^z = e^{x+iy} = e^x\cdot e^{iy} \iff |w| = e^x$ och $\arg w = y$. $0 < x < \infty \Longrightarrow 1 < |w| < \infty$, $0 < y < \pi/2 \Longrightarrow 0 < \arg w < \pi/2$, varför bilden blir $\{w \in \mathbb{C}\colon |w| > 1,\ 0 < \arg w < \pi/2\}$ eller $\{w \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} w > 0,\ \operatorname{Im} w > 0,\ |w| > 1\}$.