KTH Matematik
Olle Stormark

Lösningsförslag till SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CELTE 2010–05–28, kl. 14.00–19.00.

- Hjälpmedel: Handboken BETA och TET:s inplastade formelblad.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning i (där $i = 1, 2, 3$) får automatiskt full poäng på tal i.
- Betygsgränser: 24–26 poäng ger betyget A, 21–23 poäng ger betyget B, 18–20 poäng ger betyget C, 15–17 poäng ger betyget D och 12–14 poäng ger betyget E.
- Om du har fått 11 poäng så får du betyget Fx och har då möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta Olle i så fall. Mindre än 11 poäng ger betyget F = underkänt.
- **Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga och tydliga lösningar! Bristande läsbarhet medför poängavdrag!!**

1. Förklara varför

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G} - \boldsymbol{F} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{G}. \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

$$\begin{aligned}
\mathbf{div}\,(\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) &= \frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G})_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\epsilon_{ijk}F_jG_k \\
&= \epsilon_{ijk}\frac{\partial F_j}{\partial x_i}G_k + \epsilon_{ijk}F_j\frac{\partial G_k}{\partial x_i} \\
&= \left(\epsilon_{kij}\frac{\partial}{\partial x_i}F_j\right)G_k - \left(\epsilon_{jik}\frac{\partial}{\partial x_i}G_k\right)F_j \\
&= (\operatorname{rot} \boldsymbol{F})_k G_k - (\operatorname{rot} G)_j F_j \\
&= \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G} - \operatorname{rot} \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{F}.
\end{aligned}$$

2. Låt $\boldsymbol{F} = (y(1+z^2), z(1+x^2), x(1+y^2))$, låt $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$ och låt $\boldsymbol{n}$ vara den enhetsnormal för Σ som är riktad bort från origo. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_\Sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, dS.$$

LEDNING: Kan man byta Σ mot en enklare yta? (3p)

Lösning: Om $\Sigma^* = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0\}$ med enhetsnormalen $\boldsymbol{e}_z$, så är $\partial\Sigma = \partial\Sigma^*$ med samma orientering, och då säger Stokes att

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, dS &= \oint_{\partial\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \oint_{\partial\Sigma^*} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_{\Sigma^*} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, dS \\ &= \iint_{\Sigma^*} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_z \, dS = \iint_{\Sigma^*} (\operatorname{rot} \boldsymbol{F})_z \, dS,\end{aligned}$$

där

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y(1+z^2) & z(1+x^2) & x(1+y^2) \end{vmatrix}$$

så att

$$(\operatorname{rot} \boldsymbol{F})_z = z \cdot 2x - 1 - z^2, \text{ som är } = -1 \text{ då } z = 0.$$

Alltså är

$$\iint_\Sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, dS = -\iint_{\Sigma^*} dS = -\text{ arean av } \Sigma^* = -\pi.$$

Alternativt kan man använda Stokes direkt: På $\partial\Sigma$ är $\boldsymbol{r} = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$, där $\phi \colon 0 \to 2\pi$. Och då fås

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, dS &= \oint_{\partial\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin\phi, 0, \cos\phi(1 + \sin^2\phi)) \cdot (-\sin\phi, \cos\phi, 0) \, d\phi \\ &= -\int_0^{2\pi} \sin^2\phi \, d\phi = -\pi.\end{aligned}$$

3. Låt $u(x,y) = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$.

(a) Visa att $u(x,y)$ är harmonisk. (1p)

Lösning:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x}(x \sin y - y \cos y - \sin y)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-x}(x \sin y - y \cos y - \sin y - \sin y)$$

och

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-x}(x \cos y - \cos y + y \sin y)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-x}(-x \sin y + \sin y + \sin y + y \cos y)$$

vilket visar att

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(b) Härled en funktion $v(x,y)$ som gör att funktionen $f = u(x,y) + i\,v(x,y)$ blir komplext deriverbar. (1p)

Lösning: Cauchy–Riemannekvationerna

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

visar att

$\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^{-x}(x \cos y - \cos y + y \sin y) \Longrightarrow$

(med en partiell integration)

$v = (xe^{-x} + e^{-x}) \cos y - e^{-x} \cos y + e^{-x} y \sin y + g(y)$

$= xe^{-x} \cos y + y\,e^{-x} \sin y + g(y) \Longrightarrow$

$\dfrac{\partial v}{\partial y} = -xe^{-x} \sin y + e^{-x} \sin y + y\,e^{-x} \cos y + g'(y)$

$= \dfrac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x}(x \sin y - y \cos y - \sin y) \Longrightarrow g = C = \text{konstant} \Longrightarrow$

$v = xe^{-x} \cos y + y\,e^{-x} \sin y + C.$

(c) Uttryck f som en funktion av $z = x + iy$, så att man till slut får $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$. (1p)

Lösning:

$$\begin{aligned} f = u + iv &= x\,e^{-x} \sin y - e^{-x}\, y \cos y + ix\, e^{-x} \cos y + iy\, e^{-x} \sin y + iC \\ &= ix\, e^{-x}(\cos y - i \sin y) - y\, e^{-x}(\cos y - i \sin y) + iC \\ &= ix\, e^{-x} e^{-iy} - y\, e^{-x} e^{-iy} + iC \\ &= ix\, e^{-z} - y\, e^{-z} + iC = i(x + iy)e^{-z} + iC = iz\, e^{-z} + iC. \end{aligned}$$

4. Låt Ω vara en öppen sammanhängande mängd i $\mathbb{R}^3$ med randytan $\partial\Omega$, och låt $\boldsymbol{n}$ vara den utåtriktade enhetsnormalen för $\partial\Omega$. Förklara varför

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{F}\, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{rot} \boldsymbol{F}\, dV,$$

för varje snällt vektorfält $\boldsymbol{F}$.

LEDNING: Räcker att visa att $\boldsymbol{c}\cdot$(vänsterledet) $= \boldsymbol{c}\cdot$(högerledet) för en godtycklig konstant vektor $\boldsymbol{c}$. Det kan också vara lämpligt att använda resultatet i uppgift 1. (3p)

Lösning:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c} \cdot (\text{vänsterledet}) &= \iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{F}\, dS \\ &= \left(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} -\boldsymbol{c}- \\ -\boldsymbol{n}- \\ -\boldsymbol{F}- \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\boldsymbol{n}- \\ -\boldsymbol{F}- \\ -\boldsymbol{c}- \end{vmatrix} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{c} \right) \\ &= \iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{c}\, dS = \{ \text{ enligt divergenssatsen } \} \\ &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{c})\, dV = \iiint_{\Omega} (\operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{c} - \boldsymbol{F} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{c})\, dV \\ &= \boldsymbol{c} \cdot \iiint_{\Omega} \operatorname{rot} \boldsymbol{F}\, dV = \boldsymbol{c} \cdot (\text{högerledet}). \end{aligned}$$

5. En konstant elektrisk stöm som flyter genom en ledare längs z-axeln alstrar ett magnetfält som är proportionellt mot det fält $\boldsymbol{B}$ som i cylinderkoordinaterna ρ, ϕ och z ges av

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{\rho}\, \boldsymbol{e}_{\phi}.$$

(a) Visa att div $\boldsymbol{B} = 0$ utanför z-axeln. (1p)

Lösning:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0 \quad \text{då } \rho \neq 0.$$

(b) Visa att rot $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ utanför z-axeln. (1p)

Lösning:

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \rho\,\boldsymbol{e}_\phi & \boldsymbol{e}_z \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\phi & \partial/\partial z \\ 0 & \rho\cdot\rho^{-1} & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{0} \quad \text{då } \rho \neq 0.$$

(c) Låt γ vara spiralkurvan $(\rho,\phi,z) = (t,t,t)$, där $t\colon 0 \to 2\pi$. Beräkna linjeintegralen

$$\int_\gamma \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{r}. \qquad \text{(1p)}$$

Lösning:

$$d\boldsymbol{r} = d\rho\,\boldsymbol{e}_\rho + \rho\,d\phi\,\boldsymbol{e}_\phi + dz\,\boldsymbol{e}_z \Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{r} = d\phi = dt \Longrightarrow \int_\gamma \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

6. En punktladdning i origo med laddningen q coulomb ger upphov till det elektriska fältet

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{r^3}\,\boldsymbol{r},$$

där $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$ och $r = |\boldsymbol{r}|$. Låt Ω vara en öppen sammanhängande mängd i $\mathbb{R}^3$ med randytan $\partial\Omega$ och låt $\boldsymbol{n}$ vara den utåtriktade enhetsnormalen för $\partial\Omega$. VISA följande resultat beträffande flödet av $\boldsymbol{E}$ ut genom $\partial\Omega$:

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = 0, \quad \text{om origo ligger utanför } \Omega \qquad \text{(1p)}$$

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = 4\pi q \quad \text{om origo ligger innanför } \Omega. \qquad \text{(3p)}$$

Lösning: div $\boldsymbol{E}$ = div $(qr^{-3}\cdot\boldsymbol{r}) = q\cdot(\text{grad}\,(r^{-3})\cdot\boldsymbol{r} + r^{-3}\cdot\text{div}\,\boldsymbol{r})$.

$$\frac{\partial}{\partial x}r^{-3} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} = -\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\cdot 2x = -3x\cdot r^{-5}$$

$$\Longrightarrow \text{grad}\,(r^{-3}) = -3(x,y,z)r^{-5} = -3r^{-5}\cdot\boldsymbol{r}$$

och

$$\operatorname{div} \boldsymbol{r} = \operatorname{div}\ (x, y, z) = 1 + 1 + 1 = 3,$$

så att

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = q \cdot (-3r^{-5} \cdot \boldsymbol{r} \bullet \boldsymbol{r} + r^{-3} \cdot 3) = 0 \quad \text{då } r \neq 0.$$

Om origo ligger utanför Ω ger divergenssatsen att

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{E} \bullet \boldsymbol{n}\, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{E}\ dV = 0.$$

Om origo ligger innanför Ω: Låt B vara epsilonbollen $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 < \epsilon^2\}$, och sätt $D = \Omega \setminus B$ = den del av Ω som ligger utanför B. Då är $\partial D = \partial\Omega - \partial B$, där minustecknet beror på att den utåtriktade enhetsnormalen på ∂B sett ifrån Ω är minus denna normal sett ur B:s synvinkel ($-$ eller hur?). Eftersom $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$ i D, visar divergenssatsen att

$$\begin{aligned} 0 = \iiint_{D^*} \operatorname{div} \boldsymbol{E}\, dV &= \iint_{\partial D^*} \boldsymbol{E} \bullet \boldsymbol{n}\, dS \\ &= \iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{E} \bullet \boldsymbol{n}\, dS - \iint_{\partial B} \boldsymbol{E} \bullet \boldsymbol{n}\, dS, \end{aligned}$$

så att

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{E} \bullet \boldsymbol{n}\, dS = \iint_{\partial B} \boldsymbol{E} \bullet \boldsymbol{n}\, dS.$$

Den utåtriktade enhetsnormalen på ∂B ges av $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r$, varför

$$\boldsymbol{E} \bullet \boldsymbol{n} = qr^{-3} \cdot r^{-1} \cdot \boldsymbol{r} \bullet \boldsymbol{r} = q/r^2 = q/\epsilon^2 \text{ på } \partial B.$$

Därmed blir

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{E} \bullet \boldsymbol{n}\, dS = \frac{q}{\epsilon^2} \cdot \text{arean av } \partial B = \frac{q}{\epsilon^2} \cdot 4\pi\epsilon^2 = 4\pi q.$$

7. Beräkna den elektrostatiska potentialen V mellan cylindrarna $C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x - 1/2)^2 + y^2 = (1/2)^2\}$ och $C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x - 1)^2 + y^2 = 1\}$ om V är $= 0$ på C_1 och $= 100$ på C_2 (man får tänka sig att det är ett litet glapp mellan cylindrarna då $(x, y) \approx (0, 0)$).

LEDNING: Eftersom en translation i z-led inte ändrar någonting, så är detta ett 2-dimensionellt problem:

$$\begin{cases} \Delta V = 0 \text{ då } (x-1/2)^2 + y^2 > (1/2)^2 \text{ och } (x-1)^2 + y^2 < 1, \\ V = 0 \text{ då } (x-1/2)^2 + y^2 = (1/2)^2, \\ V = 100 \text{ då } (x-1)^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

(3p)

Lösning: Vi rätar ut båda cirklarna med en Möbius genom att skicka den *gemensamma* punkten $z = 0$ till $w = \infty$, och skickar också $z = 1$ till $w = 0$:

$$w = \frac{z-1}{z}.$$

Speciellt fås då att $z = 2$ skickas till $w = 1/2$. Eftersom vår funktion avbildar reella axeln på reella axeln och bevarar vinklar, så kommer bildlinjerna att skära reella w-axeln ortogonalt, och kommer därför att ges av $\operatorname{Re} w = 0$, respektive $\operatorname{Re} w = 1/2$.

Den inre punkten $z = 3$ avbildas på $w = 1/3$, som alltså är en *inre* punkt för bildområdet, vilket betyder att detta ges av $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 1/2\}$.

Vi får därmed följande Dirichletproblem i uv-planet:

$$\begin{cases} \Delta V = 0 \quad \text{då } 0 < u < 1/2, \ -\infty < v < \infty, \\ V = 0 \text{ då } u = 0 \text{ och } V = 100 \text{ då } u = 1/2. \end{cases}$$

Eftersom detta problem är invariant då v varierar beror lösningen V bara på u: $V = V(u)$, och då gäller det att

$$\Delta V = 0 \iff V''(u) = 0 \iff V = Au + B \quad (A, B = \text{ konstanter}).$$

Insättning av randvillkoren ger sedan att

$$\begin{cases} 0 = B, \\ 100 = A/2 + B = A/2 \implies A = 200, \end{cases}$$

så $V = 200\,u$, där

$$u = \operatorname{Re} \frac{z-1}{z} = \operatorname{Re} \frac{(x-1) + iy}{x + iy} \cdot \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{x(x-1) + y^2}{x^2 + y^2}$$
$$= 1 - \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Det vill säga,

$$V(x, y) = 200\left(1 - \frac{x}{x^2 + y^2}\right).$$

8. Bestäm en konform avbildning av cirkeltvåhörningen $\Omega = \{z \in \mathbb{C}\colon |z-1| < 2 \text{ och } |z+1| < 2\}$ på enhetsskivan $\{w \in \mathbb{C}\colon |w| < 1\}$ så att $z = 0$ avbildas på $w = 0$. (4p)

Lösning: Ω:s hörnpunkter är lösningar till systemet

$$\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 4 \\ (x-1)^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Den första ekvationen minus den andra ger att $4x = 0$; detta insatt i endera ekvationen visar att $y^2 = 3 \iff y = \pm\sqrt{3}$. Så cirkeltvåhörningens hörn är belägna i $(0, \pm\sqrt{3}) = \pm i\sqrt{3}$.

Vi rätar ut cirkelbågarna genom att skicka ena hörnpunkten till $w = \infty$ och den andra till $w = 0$ genom en Möbius − till exempel

$$w_1 = \frac{z - i\sqrt{3}}{z + i\sqrt{3}}.$$

De räta linjerna blir bestämda om vi känner bilden av någon mer randpunkt än $w_1(i\sqrt{3}) = 0$; till exempel visar rättframma räkningar att

$$z = 1 \implies w_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$z = -1 \implies w_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Då den inre punkten $z = 0$ avbildas på $w_1 = -1 = e^{i\pi}$ ser vi att bilden av Ω blir vinkelområdet $\{w_1 \in \mathbb{C}\colon 2\pi/3 < \arg w_1 < 4\pi/3\}$. Genom att vrida detta område vinkeln $-2\pi/3$ genom

$$w_2 = e^{-i2\pi/3} \cdot w_1$$

fås vinkelområdet $\{w_2 \in \mathbb{C}\colon 0 < \arg w_2 < 2\pi/3\}$, och vår utpekade punkt $z = 0$ hamnar på $e^{-i2\pi/3} \cdot e^{i\pi} = e^{i\pi/3}$.

Detta vinkelområde avbildas på hela övre halvplanet genom att öka vinkeln $2\pi/3$ till π:

$$w_3 = w_2^{3/2} = e^{-i\pi} w_1^{3/2} = -w_1^{3/2} = -\left(\frac{z - i\sqrt{3}}{z + i\sqrt{3}}\right)^{3/2},$$

varvid $z = 0$ avbildas på $e^{i\pi/3 \cdot 3/2} = e^{i\pi/2} = i$.

Till slut avbildar vi övre w_3-planet på enhetsskivan i w-planet genom att skicka $w_1 = i$ (det vill säga bilden av $z = 0$) till 0 och spegelpunkten $-i$ till ∞:

$$w = \frac{w_3 - i}{w_3 + i} = \frac{\left(\frac{z-i\sqrt{3}}{z+i\sqrt{3}}\right)^{3/2} + i}{\left(\frac{z-i\sqrt{3}}{z+i\sqrt{3}}\right)^{3/2} - i} = \frac{(z - i\sqrt{3})^{3/2} + i(z + i\sqrt{3})^{3/2}}{(z - i\sqrt{3})^{3/2} - i(z + i\sqrt{3})^{3/2}}.$$