KTH Matematik
Olle Stormark

LAPLACES OCH POISSONS EKVATIONER

Poissons ekvation

$$\Delta\phi(\boldsymbol{x}) = \rho(\boldsymbol{x})$$

(där ρ är en given funktion och ϕ söks) satisfieras till exempel av

- den elektrostatiska potentialen i ett område som innehåller laddningar (varvid ρ är proportionell mot laddningstätheten)
- gravitationspotentialen i ett område som innehåller massa (ρ är då proportionell mot masstätheten)
- den stationära (det vill säga tidsobereonde) temperaturfördelningen i en homogen kropp vid närvaro av värmekällor
- deformationen av ett tunt belastat membran (i vilket fall ρ är proportionell mot kraften per ytenhet).

Laplaces ekvation

$$\Delta\phi(\boldsymbol{x}) = 0$$

fås uppenbarligen genom att sätta $\rho = 0$ ovan. Funktioner som är lösningar till Laplaces ekvation sägs vara *harmoniska*.

Låt V vara ett begränsat område i $\mathbb{R}^3$ med randytan S.

SATS *Randvärdesproblemet*

$$\begin{cases} \Delta\phi(\boldsymbol{x}) = \rho(\boldsymbol{x}) \text{ i V,} \\ \phi \textit{ och dess nomalderivata } \nabla\phi \cdot \boldsymbol{n} \textit{ är givna på } S, \end{cases}$$

har en unik lösning i V. *Närmare bestämt gäller det för varje* $\boldsymbol{p} \in V$ *att*

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{p}) = &-\frac{1}{4\pi}\iint_V \frac{\rho(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|}\,dV + \frac{1}{4\pi}\iint_S \phi(\boldsymbol{x})\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|^3}\,dS \\ &+\frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{\nabla\phi\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|}\,dS. \end{aligned}$$

Beviset bygger på *Greens andra identitet* (formel 5.16 i Matthews' bok):

$$\iiint_{V^*} (\phi\,\Delta\psi - \psi\,\Delta\phi)\,dV = \iint_{S^*} (\phi\,\nabla\psi - \psi\,\nabla\phi) \;\boldsymbol{\cdot}\,\boldsymbol{n}\; dS,$$

där S^* är V^*:s randyta.

I satsens formel förekommer $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|^{-1}$ och $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|^{-3}$, som uppenbarligen är *elaka* i punkten $\boldsymbol{p}$. För att undvika denna elakhet tar vi bort ett litet klot $V_\epsilon = \{\boldsymbol{x} \colon |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}| < \epsilon\}$, med randytan $S_\epsilon = \{\boldsymbol{x} \colon |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}| = \epsilon\}$, från V, och sätter

$$V^* = V - V_\epsilon, \quad S^* = S - S_\epsilon,$$

där minustecknet framför S_ϵ betyder att den utåtriktade enhetsnormalen för S^* på S_ϵ är riktad *in i* V_ϵ, medan S_ϵ:s enhetsnormal är riktad utåt.

Som ψ väljer vi funktionen

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|}, \quad \text{som uppfyller } \Delta\psi = 0 \text{ då } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}.$$

Vidare är

$$\nabla\psi(\boldsymbol{x}) = -\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|^3} \quad \text{då } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}.$$

Insättning av $\Delta\phi = \rho$ och ovanstående data i Greens andra identitet ger

$$\iiint_{V-V_\epsilon} \left(\phi(\boldsymbol{x}) \cdot 0 - \frac{\rho(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|}\right) dV$$
$$= \iint_{S-S_\epsilon} \left(-\phi(\boldsymbol{x})\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|^3} - \frac{\nabla\phi(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|}\right) \boldsymbol{\cdot}\,\boldsymbol{n}\; dS,$$

eller

$$-\iiint_{V-V_\epsilon} \frac{\rho(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|}\,dV = -\iint_S \phi(\boldsymbol{x})\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|^3}\,dS - \iint_S \frac{\nabla\phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|}\,dS$$
$$+ \iint_{S_\epsilon} \phi(\boldsymbol{x})\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|^3}\,dS + \iint_{S_\epsilon} \frac{\nabla\phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|}\,dS. \qquad (*)$$

På S_ϵ är $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}| = \epsilon$. Med hjälp av detta samt divergenssatsen och medelvärdessatsen inser man att den sista termen i (*) går mot 0 då $\epsilon \to 0$:

$$\begin{aligned}\iint_{S_\epsilon} \frac{\nabla\phi \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|}\, dS &= \frac{1}{\epsilon}\iint_{S_\epsilon} \nabla\phi \cdot \boldsymbol{n}\; dS = \frac{1}{\epsilon}\iiint_{V_\epsilon} \Delta\phi\, dV \\ &= \frac{1}{\epsilon}\iiint_{V_\epsilon} \rho(\boldsymbol{x})\, dV = \frac{1}{\epsilon}\cdot\rho(\boldsymbol{p}^*)\cdot\frac{4\pi\epsilon^3}{3} \quad \text{för något } \boldsymbol{p}^* \in V_\epsilon \\ &= \frac{4\pi}{3}\cdot\rho(\boldsymbol{p}^*)\cdot\epsilon^2 \to 0 \text{ då } \epsilon \to 0.\end{aligned}$$

På S_ϵ är vidare

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}) \cdot \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|} = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}| = \epsilon.$$

Använder vi detta plus medelvärdessatsen på den näst sista termen i (*) ser vi att

$$\begin{aligned}\iint_{S_\epsilon} \phi(\boldsymbol{x})\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|^3}\, dS &= \frac{1}{\epsilon^2}\iint_{S_\epsilon}\phi(\boldsymbol{x})\, dS = \frac{1}{\epsilon^2}\phi(\boldsymbol{p}^*)\cdot 4\pi\epsilon^2 \\ &= 4\pi\phi(\boldsymbol{p}^*) \quad \text{för något } \boldsymbol{p}^* \in V_\epsilon \\ &\to 4\pi\phi(\boldsymbol{p}) \text{ då } \epsilon \to 0.\end{aligned}$$

Då $\epsilon \to 0$ i (*) går $V - V_\epsilon$ mot V och vi får

$$\begin{aligned}-\iiint_V \frac{\rho(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|}\, dV = &-\iint_S \phi(\boldsymbol{x})\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|^3}\, dS - \iint_S \frac{\nabla\phi(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|}\, dS \\ &+ 4\pi\phi(\boldsymbol{p}) + 0,\end{aligned}$$

det vill säga den önskade formeln

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{p}) = &-\frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{\rho(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|}\, dV + \frac{1}{4\pi}\iint_S \phi(\boldsymbol{x})\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|^3}\, dS \\ &+ \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{\nabla\phi\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|}\, dS.\end{aligned}$$

Antag nu att $\rho(\boldsymbol{x}) \neq 0$ *enbart i ett begränsat område* K! Det är då rimligt att anta att Poissons ekvation har en lösning ϕ som tillsammans med sin gradient $\nabla\phi$ snabbt går mot 0 långt från K. Så om vi låter S vara sfären

$$S_R = \{\boldsymbol{x} \colon |\boldsymbol{x}| = R\}$$

med radien R och medelpunkt i origo kan vi anta att ϕ och $\nabla\phi$ går mot 0 så fort på S_R att ytintegralerna i formeln ovan försvinner då $R \to \infty$. I detta limes får vi då

$$\phi(\boldsymbol{p}) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_K \frac{\rho(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|}\,dV.$$

För att verifiera denna formel måste vi kontrollera att ytintegralerna verkligen går mot 0 då $R \to \infty$ om $\phi(\boldsymbol{p})$ ges av detta uttryck.

Observera först följande uppskattning:

> Om $\boldsymbol{x} \in K$ så gäller om $|\boldsymbol{p}|$ är tillräckligt långt borta från K att $|\boldsymbol{x}| < |\boldsymbol{p}|/2$, varför
>
> $$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}| \geq |\boldsymbol{p}| - |\boldsymbol{x}| \geq |\boldsymbol{p}| - |\boldsymbol{p}|/2 = |\boldsymbol{p}|/2,$$
>
> och då blir
>
> $$\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|} \leq \frac{2}{|\boldsymbol{p}|}. \tag{$\dagger$}$$

Med hjälp av (†) ser vi att

$$|\phi(\boldsymbol{p})| = \frac{1}{4\pi}\left|\iiint_K \frac{|\rho(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|}\right| dV \leq \frac{1}{2\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{p}|}\left|\iiint_K \rho(\boldsymbol{x})\,dV\right|,$$

det vill säga

$$|\phi(\boldsymbol{p})| \leq \frac{\text{konstant}}{|\boldsymbol{p}|} \quad \text{då } |\boldsymbol{p}| \text{ är stort.}$$

Så på S_R (där $\boldsymbol{x}| = R$) är

$$|\phi(\boldsymbol{x})| \leq \frac{\text{konstant}}{R}.$$

Därmed fås att

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{4\pi}\iint_{S_R}\phi(\boldsymbol{x})\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|^3} \cdot \boldsymbol{n}\,dS\right| \leq \frac{1}{4\pi}\iint_{S_R}\frac{|\phi(\boldsymbol{x})|}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|^2}\,dS \\
&\leq \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\text{konstant}}{R}\cdot\frac{4}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = \frac{4\cdot\text{konstant}}{R} \to 0 \quad \text{då} \quad R \to \infty.
\end{aligned}$$

I den andra ytintegralen förekommer $\nabla\phi(\boldsymbol{x})$. Vi får gradienten av $\phi(\boldsymbol{p})$ genom att derivera under integraltecknet med avseende på p_1, p_2, p_3:

$$\nabla\phi(\boldsymbol{p}) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_K \rho(\boldsymbol{x})\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|}\right) dV = \frac{1}{4\pi}\iiint_K \rho(\boldsymbol{x})\cdot\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|^3}\,dV.$$

Med hjälp av uppskattningen (†) fås sedan:

$$\begin{aligned}
|\nabla\phi(\boldsymbol{p})| &\le \frac{1}{4\pi}\iiint_K |\rho(\boldsymbol{x})|\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|^2}\,dV \\
&\le \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{4}{|\boldsymbol{p}|^2}\cdot\iiint_K |\rho(\boldsymbol{x})|\,dV = \frac{\text{konstant}}{|\boldsymbol{p}|^2}
\end{aligned}$$

om $|\boldsymbol{p}|$ är stort. Så på S_R (där $|\boldsymbol{x}| = R$), är

$$|\nabla\phi(\boldsymbol{x})| \le \frac{\text{konstant}}{R^2}.$$

Beloppet av den andra ytintegralen kan därmed uppskattas på följande sätt:

$$\begin{aligned}
&\left|\iint_{S_R}\frac{\nabla\phi(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|}\,dS\right| \le \frac{\text{konstant}}{R^2}\cdot\frac{1}{R}\cdot 4\pi R^2 \\
&= \frac{4\pi\cdot\text{konstant}}{R} \to 0 \quad \text{då} \quad R\to\infty
\end{aligned}$$

– och *det var alltså korrekt att anta att ytintegralerna försvinner då* $R\to\infty$.

SATS *Om* $\rho(\boldsymbol{x}) \neq 0$ *bara i ett begränsat område* K*, så är*

$$\phi(\boldsymbol{p}) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_K \frac{\rho(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|}\,dV$$

en lösning till Poissons ekvation $\Delta\phi = \rho$*.*

Harmoniska funktioner är lösningar till Laplaces ekvation

$$\Delta\phi = 0$$

(det vill säga Poisson med $\rho = 0$). Om ϕ är harmonisk i ett område V med randytan S så gäller enligt ovan för varje $\boldsymbol{p}\in V$ att

$$\phi(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \phi(\boldsymbol{x})\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|^3}\,dS + \frac{1}{4\pi}\iint_S\frac{\nabla\phi(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|}\,dS.$$

Låt oss fixera $\boldsymbol{p}$ och låt $S_{\boldsymbol{p},R} = \{\boldsymbol{x}\colon |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}| = R\}$ vara sfären med radien R omkring $\boldsymbol{p}$. På $S_{\boldsymbol{p},R}$ är

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}| = R, \quad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|} \quad \text{och} \quad \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}|^3} = \frac{1}{R^2},$$

varför

$$
\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{p}) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_{\boldsymbol{p},R}} \phi(\boldsymbol{x}) \cdot \frac{1}{R^2}\, dS + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_{\boldsymbol{p},R}} \frac{1}{R} \cdot \nabla\phi(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}\ dS \\
&= \{ \text{ enligt divergenssatsen } \} \\
&= \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_{\boldsymbol{p},R}} \phi(\boldsymbol{x})\, dS + \frac{1}{4\pi R} \cdot \iiint_{V_{\boldsymbol{p},R}} \nabla^2 \phi\, dV \\
&= \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_{\boldsymbol{p},R}} \phi(\boldsymbol{x})\, dS + 0,
\end{aligned}
$$

där $V_{\boldsymbol{p},R} = \{\boldsymbol{x} \colon |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}| \leq R\}$.

Observera att integralen i högerledet kan tolkas som *medelvärdet av ϕ på $S_{\boldsymbol{p},R}$*. Därmed har vi visat

MEDELVÄRDESSATSEN FÖR HARMONISKA FUNKTIONER

Värdet av en harmonisk funktion $\phi(\boldsymbol{x})$ i en punkt $\boldsymbol{p}$ är lika med medelvärdet av ϕ över en sfär med $\boldsymbol{p}$ som medelpunkt:

$$
\phi(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_{\boldsymbol{p},R}} \phi(\boldsymbol{x})\, dS.
$$

Från denna sata följer **maximum och minimum principerna** för harmoniska funktioner:

> *Om $\Delta\phi = 0$ i V så kan inte ϕ ha ett strikt maximum eller strikt minimum i det inre av V.*

Ty antag att $\phi(\boldsymbol{x})$ har ett strikt maximum i en inre punkt $\boldsymbol{p}$, det vill säga $\phi(\boldsymbol{p} > \phi(\boldsymbol{x})$ i en punkterad omgivning $\{\boldsymbol{x} \colon 0 < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}| < \epsilon\}$ av $\boldsymbol{p}$. Med $r = \epsilon/2$ gäller då att $\phi(\boldsymbol{x}) < \phi(\boldsymbol{p})$ för alla $\boldsymbol{x} \in S_{\boldsymbol{p},r}$. Enligt medelvärdessatsen är därför

$$
\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{p}) &= \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_{\boldsymbol{p},r}} \phi(\boldsymbol{x})\, dS < \frac{1}{4\pi r^2} \cdot \phi(\boldsymbol{p}) \cdot \iint_{S_{\boldsymbol{p},r}} dS \\
&= \frac{1}{4\pi r^2} \cdot \phi(\boldsymbol{p}) \cdot 4\pi r^2 = \phi(\boldsymbol{p}),
\end{aligned}
$$

det vill säga

$$
\phi(\boldsymbol{p} < \phi(\boldsymbol{p}),
$$

vilket är en motsägelse. På analogt sätt visas att ϕ inte kan ha ett strikt minimum i det inre av V.