

Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

KOMPLEXA FUNKTIONER

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

1. Inledning	3
2. Komplexa tal	8
3. Speglingar, invertering och Riemannsfären	12
4. Polynom och exponentialfunktionen	20
5. Derivator och CR ekvationerna.....	31
6. Övriga elementära funktioner	42
7. ”Flertydiga funktioner”	49
8. $i\omega$ -metoden	54
9. Laplaces ekvation och konforma avbildningar ...	65
10. Möbiusfunktionen	75
11. Exempel på konforma avbildningar	83
12. Exempel på randvärdesproblem	99

Tack!

Ett antal personer har sett och kommenterat en första preliminär version av detta kompendium. Speciellt har jag mottagit många och värdefulla synpunkter från Eike Petermann – bland mycket annat har Eike lärt mig det eleganta geometriska beviset för satsen om Apolloniska cirklar.

Observera att en hel del av det som går igenom i början – det allmänna funktionsbegreppet, komplexa tal, m.m. – finns i Eikes bok *Analytiska metoder II*, som därför varmt rekommenderas som en bredvidläsningsbok.

Alla ni andra som har synpunkter (positiva eller negativa): hör av er till e-postadressen

olles@math.kth.se

Olle S.

1. Inledning

Syftet med den här kursen är att vi ska bekanta oss med och tappa respekten för *komplexa tal* och *komplexvärda funktioner av en komplex variabel*, samt inse att de senare är väldigt användbara när man vill hitta lösningar till *Laplaces elvation med föreskrivna randvillkor*.

Låt oss i denna inledning ge en kort sammanfattning av innehållet. Det är *naturligtvis* inte meningen att du skall *förstå* allting *nu* – men förhoppningsvis ska allting klarna efter genomgången kurs!

Tidigare i matematiken har vi stött på olika typer av funktioner – t.ex. *envariabelsfunktioner* $y = f(x)$, *flervariabelsfunktioner* som $z = f(x, y)$, och allmännare *vektorstörda funktioner av flera variabler*:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Ett intressant specialfall av den sista typen är *lineära funktioner* från \mathbb{R}^n till \mathbb{R}^m , vilka som bekant ges av $m \times n$ -matriser:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Här betecknar \mathbb{R} mängden av reella tal (eller tallinjen), och $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$. På motsvarande sätt betecknar \mathbb{C} *mängden av komplexa tal* eller det *komplexa talplanet*: $\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Vi har en naturlig identifikation $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ på så sätt att det komplexa talet $z = x + iy$ identifieras med den reella vektorn $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

I den här kursen studeras *komplexvärda funktioner av en komplex variabel*: $w = f(z)$, där alltså $z = x + iy$ och $w = u + iv$ är *komplexa* variabler. Om f 's definitionsområde är $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ har vi således

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_z \supseteq \mathcal{D} &\xrightarrow{f} \mathbb{C}_w \\ z &\mapsto w = f(z). \end{aligned}$$

Om z -planet \mathbb{C}_z identifieras med det reella xy -planet \mathbb{R}_{xy} och w -planet \mathbb{C}_w med uv -planet \mathbb{R}_{uv} , så kan vi lika bra uppfatta f som en *reell avbildning*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{xy}^2 \supseteq \mathcal{D} &\xrightarrow{f} \mathbb{R}_{uv}^2 \\ (x, y) &\mapsto (\operatorname{Re} f(x, y), \operatorname{Im} f(x, y)). \end{aligned}$$

Låt oss som ett enkelt exempel betrakta funktionen $w = z^2$, eller $u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy$ – det vill säga

$$\begin{cases} u = \operatorname{Re} w = \operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2, \\ v = \operatorname{Im} w = \operatorname{Im}(z^2) = 2xy. \end{cases}$$

Detta betyder att $w = z^2$ är ekvivalent med den rent *reella* avbildningen

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{xy}^2 &\rightarrow \mathbb{R}_{uv} \\ (x, y) &\mapsto (u, v) = (x^2 - y^2, 2xy). \end{aligned}$$

SLUTSATS. Varje *komplexvärd funktion av en komplex variabel* kan uppfattas som en *reell avbildning från ett reellt plan till ett annat*.

På det viset avmystifieras begreppet *komplex funktion* fullständigt. Men ett annat problem uppkommer: varför insistera på att använda komplexa tal $z = x + iy \in \mathbb{C}$ i stället för reella vektorer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$?

En förklaring är att vi vill att våra funktioner $w = f(z)$ ska vara *deriverbara* med avseende på den komplexa variabeln z , d.v.s. vi vill att

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

ska existera för alla z i f 's definitionsområde. Detta visar sig vara ekvivalent med att de reella funktionerna $u = \operatorname{Re} f(z)$ och $v = \operatorname{Im} f(z)$ ska uppfylla *Cauchy-Riemannekvationerna*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

– ett krav som inte känns fullt så naturligt. Så därför kan det trots allt vara enklare att tänka på $f(z)$ som en funktion av z snarare än som en reell avbildning $(x, y) \mapsto (\operatorname{Re} f(x, y), \operatorname{Im} f(x, y))$.

Härnäst ska vi se att

de elementära funktionerna (d.v.s. polynom, rationella funktioner, e^x , $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$ etc.) ENTYDIGT kan fortsättas från x -axeln åtminstone en bit ut i det komplexa planet som deriverbara komplexa funktioner.

Tack vare detta kan vi klara upp diverse oklarheter från den reella analysen. T.ex. vet vi att

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad \text{och} \quad \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}},$$

vilket verkar *väldigt* konstigt eftersom högerleden är praktiskt taget lika, medan vänsterleden är radikalt olika. Eller?

Accepterar vi komplexa tal kan vi byta $-t^2$ mot t^2 genom substitutionen $t \mapsto it$, och erhåller då

$$\begin{aligned} \arcsin x &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \{s = it, dt = -i ds\} = \int_0^{ix} \frac{-i ds}{\sqrt{1+s^2}} \\ &= -i \int_0^{ix} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -i \ln(ix + \sqrt{1-x^2}). \end{aligned}$$

Vi ska senare se att för godtyckliga komplexa z gäller det faktiskt att

$$\arcsin z = -i \log(iz + \sqrt{1-z^2}).$$

Så i själva verket kan arcsinusfunktionen uttryckas med hjälp av rot- och logaritmfunktionerna – fast det ser man inte i den reella världen.

En annan märklighet i den reella analysen är att den "trigonometriska formelskatten" bortsett från vissa teckenändringar gäller även för de *hyperboliska funktionerna*, trots att de senares grafer ser helt annorlunda ut än de trigonometriska funktionernas. Förklaringen till denna egendomlighet är att trigonometriska och hyperboliska funktioner ur komplex synvinkel är *praktiskt taget identiska*:

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}),$$

respektive

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \quad \cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}).$$

SLUTSATS. Man förstår många reella funktioner mycket bättre om man känner till motsvarande komplexa funktioner.

Enklaste sättet att förstå en reell funktion $y = f(x)$ är att rita dess graf $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2\}$ – eller hur? Tyvärr är det dock svårt att förstå grafen av en *komplex* funktion $w = f(z)$, eftersom

$$\text{graf}(f) = \{(x, y, \text{Re } f(x, y), \text{Im } f(x, y)) \mid (x, y) \in f\text{:s definitionssområde}\}$$

är en reellt 2-dimensionell yta i det 4-dimensionella $xyuv$ -rummet. Som ett substitut för grafen brukar man i stället undersöka hur f avbildar olika figurer eller områden i z -planet. D.v.s., givet olika figurer A_1, A_2, \dots i z -planet, vad blir deras bilder $B_1 = f(A_1), B_2 = f(A_2), \dots$ i w -planet under avbildningen $w = f(z)$? Om A_1 o.s.v. är tillräckligt representativa, så kan detta ge en god inblick i hur $w = f(z)$ fungerar.

Låt oss till slut betrakta ett *rent reellt* problem som dyker upp i diverse tillämpade ämnen – nämligen det s.k. *Dirichletproblemet*.

Låt \mathcal{D} vara ett sammanhängande och enkelt sammanhängande område i xy -planet med randkurvan $\partial\mathcal{D}$. Vi söker en reell funktion $g(x, y)$ som uppfyller Laplaces ekvation med givna randvillkor:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0 \quad \text{för alla } (x, y) \in \mathcal{D},$$

$$g|_{\partial\mathcal{D}} = \text{given styckvist kontinuerlig funktion.}$$

Exempelvis uppfyller den elektrostatiske potentialen Laplaces ekvation i ett laddningsfritt område, och om temperaturen är tidsoberoende så uppfyller den Laplaces ekvation med avseende på rumsvariablerna.

Idén består i att hitta en variabeltransformation

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases}$$

som avbildar \mathcal{D} i xy -planet på ett *enkla*re område \mathcal{D}^* i uv -planet – t.ex. enhetsskivan eller övre halvplanet. Men samtidigt är man angelägen om att differentialekvationen inte ska bli krångligare i de nya variablerna. Nu visar det sig att om $u(x, y)$ och $v(x, y)$ satisfierar

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{och} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

så övergår Laplaces ekvation i sig själv – d.v.s., om g dels uppfattas som en funktion av u och v , och dels som en funktion av x och y via $g(u, v) =$

$g(u(x, y), v(x, y))$, så är

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0 \iff \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0.$$

I de nya uv -variablerna har vi därmed fått ett *enklare* område \mathcal{D}^* , medan differentialekvationen är precis densamma. Och om \mathcal{D}^* antingen är enhetsskivan eller övre halvplanet så kan lösningen till Dirichletproblemet i uv -variablerna skrivas upp explicit med hjälp av något som kallas för *Poissons integralformel*, och sedan får vi lösningen i ursprungsvariablerna genom att byta u och v mot $u(x, y)$ respektive $v(x, y)$.

Poissons formel är dock för avancerad för oss. Istället ska vi i ett antal exempel se att om randvärdesfunktionen är tillräckligt snäll så är det ofta möjligt att hitta en lösning i uv -variablerna genom okulärbesiktning – d.v.s. utan att behöva räkna just någonting.

Observera att de villkor som vi krävt att u och v ska uppfylla är precis Cauchy-Riemann ekvationerna, vilket betyder att $w = u(x, y) + iv(x, y)$ kan uppfattas som en deriverbar komplex funktion $w = f(z)$. Så vårt problem består i att hitta en deriverbar komplex funktion $w = f(z)$ som avbildar \mathcal{D} på ett enkelt standardområde i uv -planet. Detta är därmed besläktat med ett problem som vi tittat på tidigare: givet \mathcal{D} och $w = f(z)$, vad blir bilden $f(\mathcal{D})$ i uv -planet?

Så slutsatsen blir att man har stor nytta av komplexa funktioner när man ska lösa randvärdesproblem för Laplaces ekvation.

2. Komplexa tal

För att kunna förstå vad som menas med *komplexa funktioner* $w = f(z)$, där $z = x + iy$ och $w = u + iv$ är *komplexa variabler*, måste man först förstå de komplexa talen – så låt oss börja med att snabbt repetera dessa.

Utgångspunkten är att det komplexa planet \mathbb{C} identifieras med det reella planet \mathbb{R}^2 genom att det *komplexa talet* $z = x + iy$ identifieras med den *reella vektorn* (eller pilen) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Nu är \mathbb{R}^2 ett *vektorrum* över \mathbb{R} i den meningen att man kan bilda *lineärkombinationer* av vektorer:

$$(x_1, y_1) \text{ och } (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2, a \text{ och } b \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ a(x_1, y_1) + b(x_2, y_2) = (ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2) \in \mathbb{R}^2,$$

och denna vektorrumsstruktur ärvs av \mathbb{C} . D.v.s., om z_1, z_2 är komplexa tal och a, b är reella tal, så fås ett nytt komplext tal genom lineärkombinationen

$$az_1 + bz_2 = a(x_1 + iy_1) + b(x_2 + iy_2) = ax_1 + bx_2 + i(ay_1 + by_2).$$

Men till skillnad från \mathbb{R}^2 har \mathbb{C} dessutom en *multiplikativ struktur*: om $z_1 = x_1 + iy_1$ och $z_2 = x_2 + iy_2$ är komplexa tal, så fås deras *produkt* $z_1 \cdot z_2$ genom att använda "vanliga räkneregler" tillsammans med den ovanliga regeln $i^2 = -1$:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Motsvarande multiplikation för \mathbb{R}^2 ges alltså av

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2),$$

– vilket verkar något egendomligt.

För att få ett bättre begrepp om hur multiplikationen fungerar är det lämpligt att införa *polära koordinater*, på samma sätt som man gör i den reella analysen.

Beloppet $|z|$ av det komplexa talet $z = x + iy = (x, y)$ definieras som *längden* av vektorn (x, y) – vilken enligt Pythagoras ges av

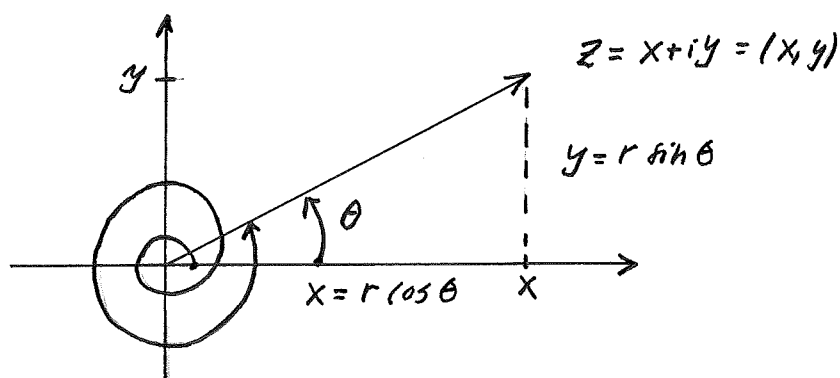
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Vidare definieras *argumentet* $\arg z$ av z för $z \neq 0$ som *mängden av alla vinklar från positiva reella axeln till vektorn* (x, y) . Observera att om θ_0 är en sådan vinkel, så fås alla andra genom att lägga till eller dra ifrån ett helt antal varv, d.v.s.

$$\arg z = \theta_0 + 2\pi n, \quad \text{där } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Funktionen \arg är således en avbildning $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ som är "flertydig" i den meningen att till varje $z \neq 0$ hör *oändligt många* värden $\arg z$. En sådan avbildning brukar kallas för en "flertydig funktion" – trots att vi alla har fått lära oss att en *funktion* är detsamma som en *entydig* avbildning.

Låt nu $z = x + iy = (x, y)$ vara skild från 0, och sätt $r = |z|$, $\theta =$ något värde av $\arg z$:



Vi ser då att

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \end{cases}$$

där det inte spelar någon roll vilket värde på $\arg z$ som används, eftersom $\cos(\theta + 2\pi n) = \cos \theta$ och $\sin(\theta + 2\pi n) = \sin \theta$. Detta ger sedan att

$$z = x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Om $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ och $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$, så ser vi att produkten $z_1 \cdot z_2$ blir

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 ((\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)), \end{aligned}$$

vilket innebär att

$$|z_1 \cdot z_2| = r_1 r_2 = |z_1| |z_2| \quad \text{och att} \quad \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2,$$

där de båda leden i den sista likheten består av oändligt många punkter på reella linjen (med det inbördes avståndet 2π), och likhetstecknet tolkas som att dessa båda *punktmängder överensstämmer med varandra*.

Man får alltså produktens längd genom att multiplicera faktorernas längder med varandra och dess argument genom att addera faktorernas argument – vilket har en lättbegriplig geometrisk tolkning.

Exempel. $(0, 1) = 0 + i \cdot 1 = i$ har längden 1 och argumentet $\pi/2 + 2\pi n$, så att

$$(0, 1) = i = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right).$$

Därmed blir

$$(0, 1)^2 = i^2 = 1^2 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi) = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i \cdot 0 = -1,$$

så från den här synpunkten sett är det *väldigt* naturligt att $i^2 = -1$. ELLER HUR?

Räkneregeln

$$(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

påminner om en karakteristisk egenskap hos exponentialfunktionen, nämligen

$$e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}.$$

Låt oss se att detta inte är någon tillfällighet! I den reella analysen har vi sett att

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{för alla } x.$$

Eller om vi tar de jämna potenserna för sig, och de udda för sig:

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Vidare kommer vi ihåg att

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} \quad \text{och} \quad \sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} \quad \text{för alla } x.$$

Om vi nu brutalt sätter $x = i\theta$, så får vi

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2m+1}}{(2m+1)!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \theta^{2m}}{(2m)!} + i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \theta^{2m+1}}{(2m+1)!} \\ &= \cos \theta + i \sin \theta. \end{aligned}$$

Detta betyder att räkneregeln ovan går över i

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} &= (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ &= e^{i\theta_1 + i\theta_2}, \end{aligned}$$

vilket känns *väldigt* tillfredsställande.

Vi har därmed kommit fram till att den *polära framställningen* av ett komplext tal z ges av

$$z = |z| \cdot e^{i \arg z},$$

och att multiplikationen $z_1 \cdot z_2$ blir så här naturlig:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| e^{i \arg z_1} \cdot |z_2| e^{i \arg z_2} = |z_1| |z_2| \cdot e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)}.$$

Observera att för varje heltal n är

$$e^{i2\pi n} = \cos(2\pi n) + i \sin(2\pi n) = 1 + i0 = 1,$$

så att

$$e^{i(\theta + 2\pi n)} = e^{i\theta} \cdot e^{i2\pi n} = e^{i\theta}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

vilket betyder att $e^{i \arg z}$ är oberoende av *vilket* värde på

$$\arg z = \theta_0 + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

som används.

Om $z = r e^{i\theta}$ med $r \neq 0$ så blir

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r e^{i\theta}} = \frac{1}{r e^{i\theta}} \cdot \frac{e^{-i\theta}}{e^{-i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{r e^0} = \frac{e^{-i\theta}}{r},$$

och härur följer att kvoten mellan z_1 och $z_2 \neq 0$ blir

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = r_1 e^{i\theta_1} \cdot \frac{e^{-i\theta_2}}{r_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\theta_1 - \theta_2)},$$

vilket gör att divisionen av komplexa tal också blir naturlig.

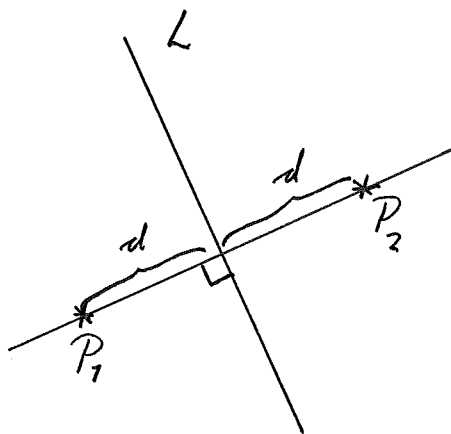
Om man i stället föredrar cartesiska koordinater, så utförs divisionen genom att förlänga med "nämnarens komplexkonjugat":

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{-x_1 y_2 + y_1 x_2}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

3. Speglingar, invertering och Riemannsfären

För att förstå inverteringen $z \mapsto 1/z$ geometriskt är det lämpligt att införa *speglingar* med avseende på räta linjer och cirklar.

Låt först L vara en rät linje i det komplexa planet \mathbb{C} , och låt P_1 vara en punkt utanför L . P_1 's spegelpunkt P_2 med avseende på L fås genom att dra den normal till L som går genom P_1 och sedan avsätta P_2 på denna normal på andra sidan om L så att P_2 's avstånd till L är lika med P_1 's avstånd till L :



Denna speglingsoperation har följande egenskaper:

1. räta linjen genom två spegelpunkter skär L vinkelrätt;
2. L delar planet i två disjunkta delar, och speglingen avbildar den ena delen enentydigt på den andra.

Observera också att spegling i reella axeln är detsamma som komplexkonjugering: $z = x + iy \mapsto x - iy = \bar{z}$.

Låt sedan C vara en cirkel med radien R och medelpunkten \mathcal{O} . C delar planet i två disjunkta delar: C 's insida respektive utsida.

Vi vill definiera en speglingsoperation med avseende på C så att följande gäller, i analogi med vad som är fallet för räta linjer:

1. räta linjen genom två spegelpunkter skär C vinkelrätt;
2. insidan av C (med undantag för medelpunkten \mathcal{O}) avbildas enentydigt på utsidan, och vice versa.

DEFINITION. Punkterna P_1 och P_2 sägs vara *spegelpunkter med avseende på \mathcal{C}* om

P_1 och P_2 ligger på samma förlängda radie från \mathcal{O} ,
och $|\overrightarrow{OP_1}| \cdot |\overrightarrow{OP_2}| = R^2$,

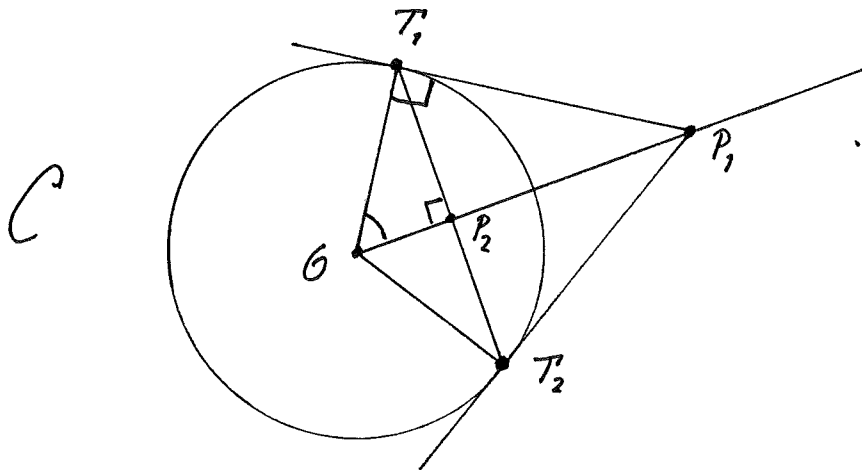
där

$|\overrightarrow{OP}|$ = längden av vektorn \overrightarrow{OP} = avståndet mellan \mathcal{O} och \mathcal{P} .

Egenskapen 1. följer av att den förlängda radien skär \mathcal{C} vinkelrätt. För att verifiera 2. noterar vi att

$$\begin{aligned} P_1 \in \mathcal{C}:s \text{ insida} &\iff |\overrightarrow{OP_1}| < R \iff |\overrightarrow{OP_2}| = \frac{R^2}{|\overrightarrow{OP_1}|} > R \\ &\iff P_2 \in \mathcal{O}:s \text{ utsida.} \end{aligned}$$

Om P_1 ligger utanför \mathcal{C} så fås spegelpunkten P_2 genom följande geometriska konstruktion:



Dra de två räta linjer genom P_1 som tangerar \mathcal{C} , och kalla tangeringspunkterna för T_1 och T_2 . Av symmetriskäl kommer den räta linjen genom T_1 och T_2 att skära förlängda radien genom P_1 vinkelrätt; kalla skärningspunkten för P_2 .

Observera att trianglarna OT_1P_2 och OT_1P_1 båda är rätvinkliga och att vinkeln vid O är gemensam. Härur följer att dessa trianglar är *likformiga*. Utgår vi från vinkeln vid O och betraktar förhållandena mellan närliggande katet och hypotenusan i våra trianglar, så följer det att

$$\frac{|\overrightarrow{OP_2}|}{|\overrightarrow{OT_1}|} = \frac{|\overrightarrow{OT_1}|}{|\overrightarrow{OP_1}|},$$

eller

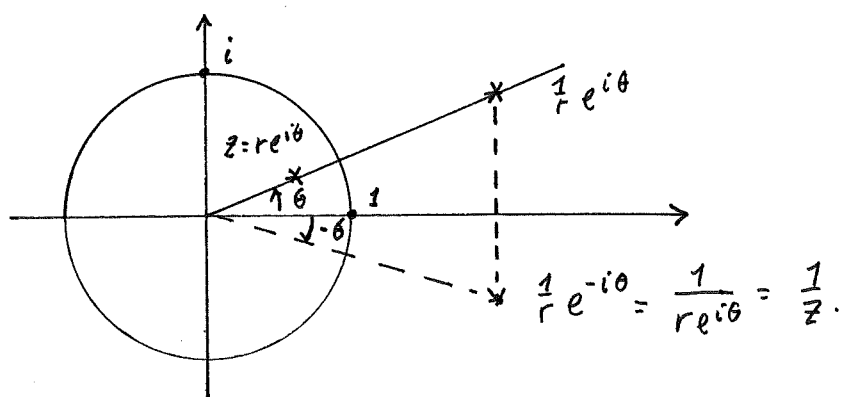
$$|\overrightarrow{OP_1}| \cdot |\overrightarrow{OP_2}| = |\overrightarrow{OT_1}|^2 = R^2,$$

vilket visar att P_1 och P_2 verkligen är spegelpunkter med avseende på \mathcal{C} .

Antag att P_1 istället ligger innanför \mathcal{C} . Då ritas man förlängda radien genom P_1 och drar sedan normalen genom P_1 till denna radie. Om normalens skärningspunkter med cirkeln är T_1 och T_2 , så konstruerar man sedan \mathcal{C} 's tangenter i dessa båda punkter. Av symmetriskäl kommer de båda tangenterna att skära varandra i en punkt P_2 på förlängda radien genom P_1 . Samma typ av resonemang som ovan visar sedan att P_1 och P_2 är spegelpunkter med avseende på \mathcal{C} .

Betrakta nu en punkt $z = r \cdot e^{i\theta}$ i komplexa planet med $z \neq 0$. z 's spegelpunkt med avseende på enhetscirkeln $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ är $\frac{1}{r} \cdot e^{i\theta}$ (ELLER HUR?), och om denna punkt sedan speglas i den reella axeln så fås dess komplexkonjugat

$$\frac{1}{r} \cdot e^{-i\theta} = \frac{1}{r \cdot e^{i\theta}} = \frac{1}{z}.$$



SLUTSATS. Inverteringen $z \mapsto 1/z$ fås som sammansättningen av två speglingar: först med avseende på enhetscirkeln och sedan med avseende på reella axeln (eller i omvänd ordning).

Vi såg tidigare att vid spegling i en cirkel kommer alla punkter innanför denna *utom medelpunkten* att avbildas på punkter utanför. Men vad händer då med medelpunkten?

Lägg in ett koordinatsystem så att medelpunkten hamnar i origo och cirkeln definieras av $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$. Spegling med avseende på \mathcal{C} ges då av

$$z = r \cdot e^{i\theta} \mapsto \frac{R^2}{r} \cdot e^{i\theta} = \frac{R^2}{re^{-i\theta}} = \frac{R^2}{\bar{z}}.$$

För $0 < \epsilon < R$ följer det att

$$D_\epsilon := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \epsilon\} \text{ avbildas på } U_{R^2/\epsilon} := \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \frac{R^2}{\epsilon}\right\}.$$

Då $\epsilon \rightarrow 0+$ kommer cirkelskivan D_ϵ att krympa ihop till en *punkt* – nämligen origo. Och *det skulle vara trevligt* om också $U_{R^2/\epsilon}$ konvergerade mot en *punkt*, som i så fall bör kallas för ∞ :

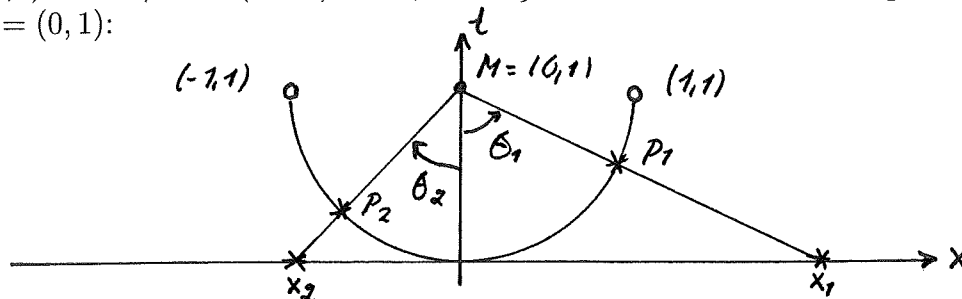
$$'' \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \frac{R^2}{\epsilon}\right\} = \infty ''.$$

Detta skulle innebära att ∞ är ett slags punkt som ligger oändligt långt bort och på något underligt vis *omsluter* hela komplexa planet.

Innan vi försöker förstå oss på denna komplexa oändlighet kan det kanske vara lämpligt att först lösa motsvarande problem för de reella talen.

Som vanligt identifieras mängden \mathbb{R} av reella tal med mängden av punkter på en x -axel. Låt oss också införa en t -axel vinkelrätt mot x -axeln.

1. Omvandling av $\pm\infty$ till två vanliga ändliga tal. Inför halvcirkeln $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (t - 1)^2 = 1, t < 1\}$ med radien 1 och medelpunkten $M = (0, 1)$:



För varje reellt tal x (vilket naturligt identifieras med punkten $(x, 0)$ i planet) dras den räta linjen från M till x . Denna linje skär halvcirkeln i en entydigt bestämd punkt p . Inför också vinkeln θ vid M mätt från radien $\{(0, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t \leq 1\}$ till denna räta linje. Ur figuren framgår det att vi får 1-1-korrespondenser mellan följande tre mängder:

de reella talen $x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$,
punkterna p på halvcirkeln,
vinklarna $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Om vi nu låter $x \rightarrow +\infty$, så ser vi att $p \rightarrow (1, 1)$ och att $\theta \rightarrow \pi/2$; om istället $x \rightarrow -\infty$ så följer det att $p \rightarrow (-1, 1)$ och $\theta \rightarrow -\pi/2$.

SLUTSATS. Via projektion från M har vi fått en enentydig avbildning av $(-\infty, +\infty)$ på $(-\pi/2, +\pi/2)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} = (-\infty, +\infty) &\xleftrightarrow{1-1} (-\pi/2, +\pi/2), \\ x &\longrightarrow \arctan x, \\ \tan \theta &\longleftarrow \theta. \end{aligned}$$

Och vi ser att det med hjälp av denna projektion är möjligt att identifiera $+\infty$ med $\theta = +\pi/2$ och $-\infty$ med $\theta = -\pi/2$. Den en-entydiga avbildningen ovan kan därmed utvidgas till

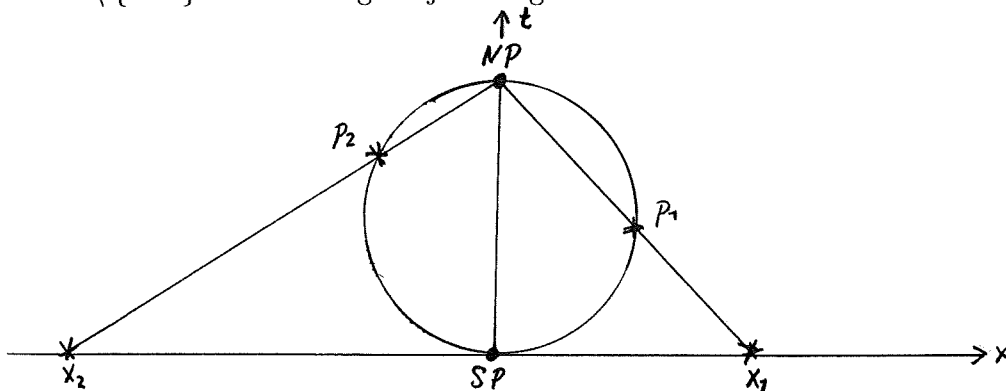
$$\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \xleftrightarrow{1-1} [-\pi/2, +\pi/2].$$

Detta innebär att de mystiska oändlighetspunkterna (som ju inte är några riktiga tal, utan ligger bortom alla tal man kan tänka sig) har ersatts av de *vanliga ändliga talen* $\pm\pi/2$ på θ -axeln.

Emellertid ville vi i det komplexa fallet ha *enbart en* oändlighetspunkt, som på något vis omsluter det komplexa planet. Låt oss därför modifiera konstruktionen ovan så att vi i det reella fallet får *en enda punkt* som svarar mot både $+\infty$ och $-\infty$.

Omvandling av $\pm\infty$ till en enda ändlig punkt. Byt halvcirkeln ovan mot *hela* cirkeln $\mathcal{C} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (t-1)^2 = 1\}$. Punkten $(0, 2)$ på \mathcal{C} kallas av naturliga skäl för *nordpolen* (förkortat *NP*), medan $(0, 0)$ kallas för *sudpolen*. Projektionen från nordpolen ger i detta fall en 1-1-korrespondens

$\mathbb{C} \setminus \{NP\} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$ enligt följande figur:



D.v.s., mot varje punkt p på cirkeln *utom nordpolen* svarar ett entydigt bestämt reellt tal x , och vice versa.

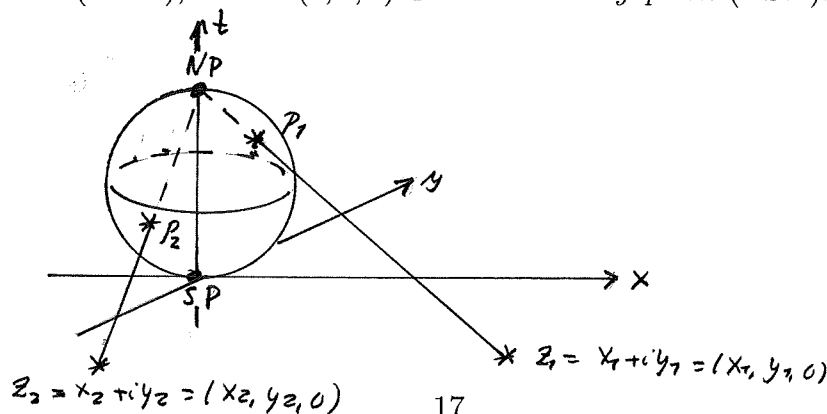
Om vi nu låter $x \rightarrow +\infty$ eller $x \rightarrow -\infty$ så ser vi att motsvarande punkt $p \in \mathbb{C}$ går mot *nordpolen*, så att den alltså motsvarar $\{\pm\infty\}$.

SLUTSATS. Via projektion från nordpolen fås en enentydig avbildning av $\mathbb{C} \setminus \{NP\}$ på hela reella axeln. NP själv svarar mot $\{\pm\infty\}$, och är därmed en "oändlighetspunkt som omsluter \mathbb{R} ".

Komna så här långt är det inte svårt att gissa hur vi ska bära oss åt för att införa vår önskade komplexa oändlighetspunkt som ska omsluta hela komplexa talplanet.

Låt oss identifiera det komplexa z -planet med det reella xy -planet, och dessutom införa en t -axel som är vinkelrät mot detta xy -plan.

DEFINITION. *Riemannsfären* $\widehat{\mathbb{C}}$ är den reellt 2-dimensionella sfären $\widehat{\mathbb{C}} = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (t-1)^2 = 1\}$. Punkten $(0, 0, 2) \in \widehat{\mathbb{C}}$ kallas för *nordpolen* ($=NP$), medan $(0, 0, 0) \in \widehat{\mathbb{C}}$ kallas för *sydpolen* ($=SP$).



Ett komplext tal $z = x + iy$ identifieras med punkten $(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$. Strålen från NP till $z = (x, y, 0)$ skär sfären $\widehat{\mathbb{C}}$ i en entydigt bestämd punkt p . Omvänt, om $p \in \widehat{\mathbb{C}}$ är given, så kommer strålen från NP genom p att skära det komplexa planet i en unik punkt z . På detta sätt ger projektionen från NP en 1 – 1-korrespondens

$$\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{NP\} \xleftrightarrow{1-1} \mathbb{C},$$

så att $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{NP\}$ kan identifieras med det komplexa planet \mathbb{C} . Vidare ser vi att då $|z| \rightarrow \infty$ (*helt oavsett* hur $\arg z$ uppför sig), så kommer motsvarande punkt $p \in \widehat{\mathbb{C}}$ att konvergera mot NP . Detta gör att vi kan identifiera NP med vår sökta oändlighetspunkt ∞ , och 1 – 1-korrespondensen ovan utvidgas då till

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Poängen med den här konstruktionen är att den gör det möjligt att uppfatta den normalt sett mycket mystiska oändligheten som en väldigt konkret punkt – nämligen nordpolen på Riemannsfären, som ju inte skiljer sig ett dugg från alla andra punkter på sfären.

Låt oss nu återvända till spegling med avseende på en cirkel $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R\}$ i komplexa planet. Vi såg tidigare att en punkt $z \neq z_0$ har en spegelbild z^* som är entydigt bestämd av villkoren

1. $\arg(z - z_0) = \arg(z^* - z_0)$,
2. $|z - z_0| \cdot |z^* - z_0| = R^2$.

Detta betyder att

$$z^* = z_0 + \frac{R^2}{|z - z_0|^2} (z - z_0) \quad (\text{ELLER HUR?}).$$

A priori är denna spegling bara definierad då $z \neq z_0$, men vi ser att

$$z \rightarrow z_0 \implies |z^*| \rightarrow \infty, \quad \text{d.v.s.} \quad z \rightarrow \infty (= NP).$$

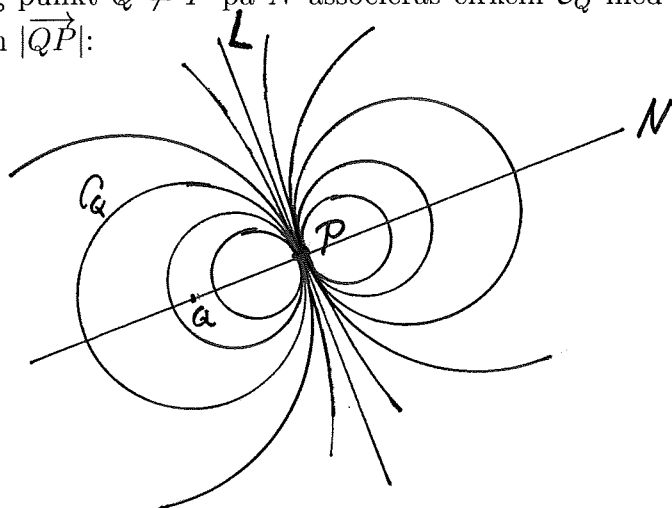
Omvänt gäller att

$$z \rightarrow \infty (= NP) \implies |z^* - z_0| = \frac{R^2}{|z - z_0|} \rightarrow 0, \quad \text{d.v.s.} \quad z^* \rightarrow z_0.$$

Följaktligen behöver vi inte längre uppfatta z_0 som en undantagspunkt, utan speglingen är väldefinierad även i denna punkt, och skickar den till oändligheten. På samma sätt kommer oändlighetspunkten att speglas till z_0 , så att vi kan uppfatta speglingen som en väldefinierad enentydig avbildning av $\widehat{\mathbb{C}}$ på sig själv.

Spegling med avseende på en rät linje är en väldigt naturlig avbildning, medan spegling med avseende på en cirkel inte är en lika självklar operation. Låt oss dock notera att vi kan uppfatta en rät linje L som ett gränsfall av en 1-parametrisk skara av cirklar, så att det egentligen inte är så stor skillnad mellan linjer och cirklar:

Tag en punkt P på L och drag normalen N till L genom P . Till en godtycklig punkt $Q \neq P$ på N associeras cirkeln C_Q med medelpunkten Q och radien $|\overrightarrow{QP}|$:



Då $|\overrightarrow{QP}| \rightarrow \infty$ är det tydligt att $Q \rightarrow \infty (= NP)$ och att $C_Q \rightarrow L$, så att vi åtminstone intuitivt kan hävda att

$$L = \lim_{|\overrightarrow{QP}| \rightarrow \infty} C_Q.$$

På grund av detta är det naturligt att också uppfatta L som en cirkel – nämligen en ”cirkel genom oändlighetspunkten”. Och det är inte så svårt att övertyga sig om att vid ovanstående gränsövergång kommer spegling med avseende på C_Q att övergå i spegling med avseende på L .

4. Polynom och exponentialfunktionen

Med en *komplexvärd funktion* $w = f(z)$ av en *komplex variabel definierad i en öppen delmängd* \mathcal{D} av det *komplexa planet* \mathbb{C} menas en entydig avbildning

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_z \supseteq \mathcal{D} &\xrightarrow{f} \mathbb{C}_w \\ z &\mapsto w = f(z), \end{aligned}$$

d.v.s. till varje $z \in \mathcal{D}$ associeras ett entydigt bestämt komplext tal $w = f(z)$. (På grund av det trassel med arg z som vi hade i förra avsnittet tvingas vi så småningom att införa "flertydiga funktioner", men låt oss vänta med sådana missfoster så länge.)

I den reella analysen har vi stiftat bekantskap med *elementära funktioner* som

polynom, rationella funktioner, exponentialfunktionen, logaritmen, trigonometriska funktioner och deras inverser, hyperboliska funktioner – och så vidare.

Man kan visa att om $f(x)$ är en sådan elementär funktion (eller mera allmänt om $f(x)$ är "reellt analytisk"), så finns en *unik bestämd deriverbar komplex funktion* $\tilde{f}(z)$ definierad nära reella axeln med egenskapen att

$$\tilde{f}(x + i0) = f(x) \quad \text{för alla } x \text{ i } f\text{:s definitionsområde,}$$

d.v.s. $f(x)$ har en *unik fortsättning* åtminstone en bit ut i det komplexa planet som en deriverbar komplex funktion av $z = x + iy$. I det följande ska vi beskriva alla dessa elementära komplexa funktioner.

Låt oss börja lite försiktigt med *polynom*. Om

$$y = P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad \text{med } a_n \neq 0,$$

så är det uppenbart att motsvarande *komplexa* polynom ges av

$$w = P_n(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n.$$

Och naturligtvis kan vi i det komplexa fallet låta konstanterna a_0, \dots, a_n få anta komplexa värden.

Exempel. Mot $y = x^2$ svarar $w = z^2$, eller, om vi sätter $z = x + iy$ och $w = u + iv$,

$$u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy.$$

Eftersom såväl real- som imaginärdelarna av båda leden måste vara lika, så ser vi att

$$w = z^2 \iff \begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = 2xy. \end{cases}$$

Med *graf*en av denna funktion menas delmängden

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = 2xy, \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

av det 4-dimensionella x, y, u, v -rummet – vilket är svårt att föreställa sig. För att ändå få ett begrepp om hur avbildningen $w = z^2$ fungerar kan vi t.ex. se hur den avbildar ett *axelparallellt rutnät* i z -planet in i w -planet.

Om $x = a$ (där a är en konstant) är en *vertikal* linje i xy -planet, så följer det att

$$\begin{cases} u = a^2 - y^2, \\ v = 2ay. \end{cases}$$

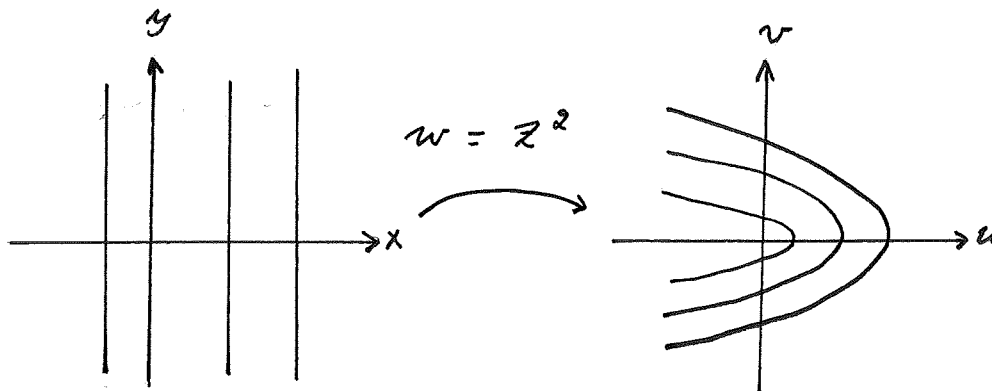
I specialfallet $a = 0$ studerar vi y -axeln, vars bild i uv -planet ges av

$$u = -y^2, \quad v = 0,$$

varför vi får negativa u -axeln, genomlöpt först åt höger och sedan åt vänster då y växer från $-\infty$ till $+\infty$. Då $a \neq 0$ kan vi eliminera y mellan ekvationerna ovan:

$$y = \frac{v}{2a} \Rightarrow u = a^2 - y^2 = a^2 - \frac{v^2}{4a^2},$$

vilket innebär att vi får en skara av *parabler* i uv -planet:



Om vi i stället tittar på *horisontella linjer* $y = b$ (där b är en konstant),

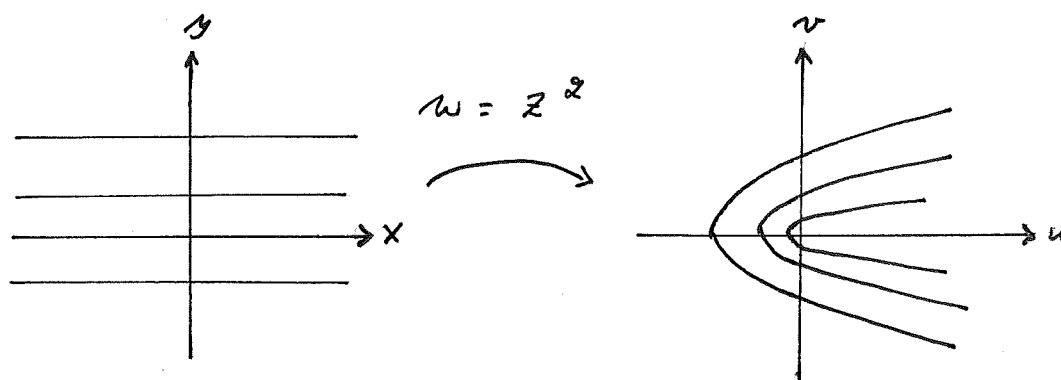
så får vi

$$\begin{cases} u = x^2 - b^2, \\ v = 2xb, \end{cases}$$

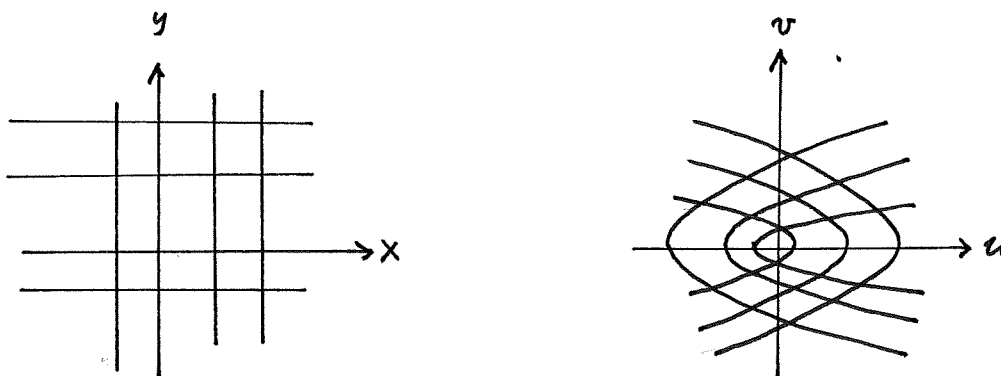
vilket då $b \neq 0$ ger att

$$x = \frac{v}{2b} \quad \text{och} \quad u = \frac{v^2}{4b^2} - b^2,$$

så att vi återigen får en parabelskara i uv -planet, fast den här gången vänd åt motsatt håll:

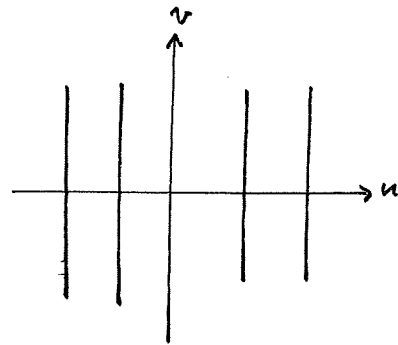
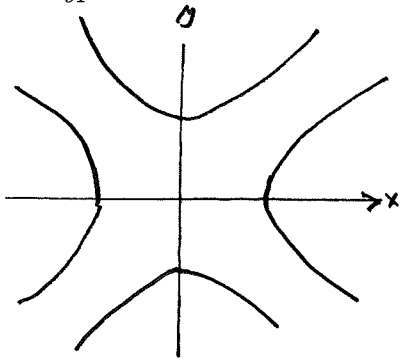


Tillsammans får vi följande bild:

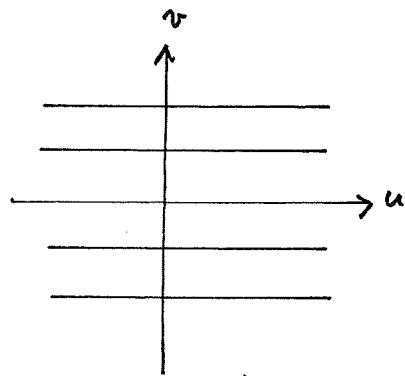
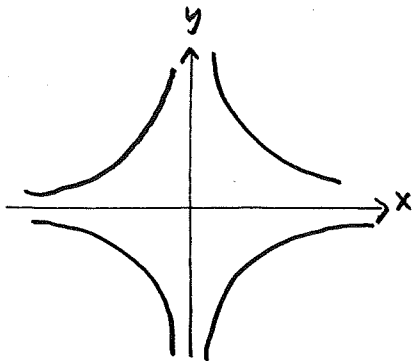


Om man ritar upp det här väldigt noggrant (eller snarare använder MATLAB eller MAPLE eller dylikt), så ser man att de två parabelskarorna skär varandra under *räta vinklar* överallt utom i origo. Vi ska senare se att detta inte är någon tillfällighet.

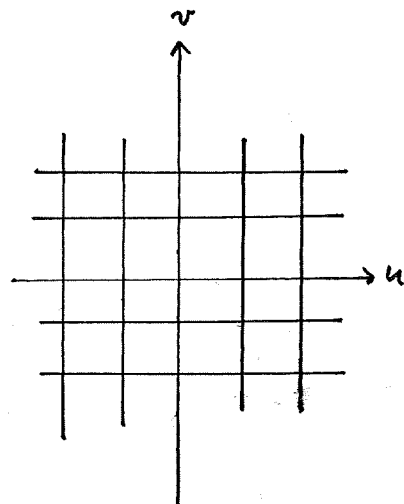
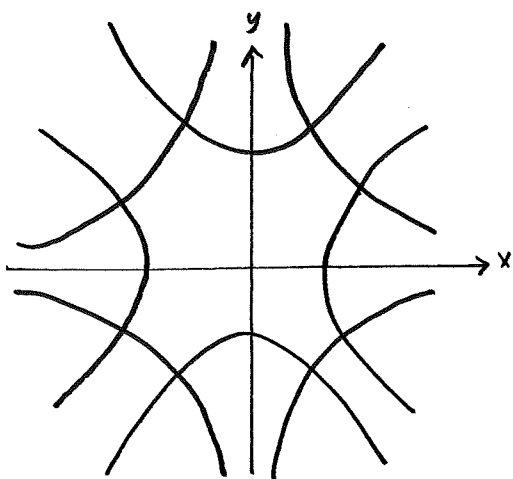
Omvänt kan man fråga sig hur Urbilden till ett axelparallellt rutnät i uv -planet ser ut. Då $u = a = \text{konstant}$ ser vi att $x^2 - y^2 = a$, vilket är en skara av hyperbler:



Med $v = b = \text{konstant}$ så blir $b = 2xy \iff xy = b/2$, vilket ger en annan hyperbelskara:



Tillsammans fås:



Även i det här fallet visar det sig att kurvskarorna skär varandra *under rätta vinklar*.

Förhoppningsvis har dessa överläggningar gett oss en viss känsla för hur funktionen $w = z^2$ fungerar. Och allmännare polynom $w = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$ kan behandlas på liknande sätt.

Rationella funktioner definieras sedan som kvoter av polynom:

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n}{b_0 + b_1z + \dots + b_mz^m}.$$

I den senare delen av den här kursen kommer vi speciellt att studera s.k. *Möbiusfunktioner*, som är kvoter av *förstgradspolynom*:

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{där } a, b, c, d \text{ är komplexa konstanter.}$$

Observera att om $c = 0$, så reduceras $m(z)$ till ett förstgradspolynom. För att undvika detta antar vi att $c \neq 0$. I så fall kan vi uttrycka vår Möbiusfunktion som

$$m(z) = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) + \frac{bc-ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + d/c}.$$

Detta innebär att $m(z)$ kan fås som en samansättning av enklare funktioner:

$$z \mapsto z + d/c \mapsto \frac{1}{z + d/c} \mapsto \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + d/c} \mapsto \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + d/c} = m(z).$$

För att tolka detta inför vi avbildningarna

$$T_h(z) = z + h = \text{translation med konstanten } h,$$

$$M_k(z) = k \cdot z = \text{multiplikation med konstanten } k,$$

$$I(z) = \frac{1}{z} = \text{invertering.}$$

Vi ser då att

$$m = T_{a/c} \circ M_{(bc-ad)/c^2} \circ I \circ T_{d/c}.$$

Här är translationen T och multiplikationen M lättbegripliga, så den icke-triviala delen av m består av inverteringen I – som vi dock lärde känna i föregående avsnitt.

Observera att

$$ad - bc = 0 \implies m(z) = a/c = \text{en konstant funktion.}$$

Eftersom konstanta funktioner inte är speciellt upphetsande, förutsätter vi i det följande att $ad - bc \neq 0$.

Möbiusfunktionens nämnare är $= 0$ då $z = -d/c$. Men vi har tidigare sett att

$$z \rightarrow 0 \implies \frac{1}{z} \rightarrow \infty = \text{nordpolen på Riemannsfären,}$$

och detta innebär att

$$z \rightarrow -d/c \implies \frac{1}{z + d/c} \rightarrow \infty.$$

D.v.s. om vi låter M 's värderum vara Riemannsfären $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ snarare än \mathbb{C} , så ser vi att m blir väldefinierad även då $z = -d/c$. Vidare ser vi att

$$z \rightarrow \infty \implies \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a + b/z}{c + d/z} \rightarrow \frac{a}{c},$$

vilket betyder att vi kan utvidga m 's definitionsområde till att även omfatta $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$.

Det är därför naturligt att uppfatta Möbiusfunktionen som en avbildning av Riemannsfären $\widehat{\mathbb{C}}$ på sig själv, definierad på följande sätt:

$$\begin{aligned} m: \widehat{\mathbb{C}} &\rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \\ z &\mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{om } z \neq -d/c \text{ och } z \neq \infty, \\ -d/c &\mapsto \infty, \\ \infty &\mapsto a/c. \end{aligned}$$

m är till och med en en-entydig avbildning av $\widehat{\mathbb{C}}$ på sig själv, eftersom man lätt ser att $w = m(z)$ har en invers $z = m^{-1}(w)$:

$$\begin{aligned} w = \frac{az + b}{cz + d} &\iff z \cdot cw + dw = az + b \iff z(cw - a) = -dw + b \\ &\iff z = \frac{-dw + b}{cw - a} = m^{-1}(w), \end{aligned}$$

så att $z = m^{-1}(w)$ är en ny Möbiusfunktion i variabeln w . Vi återkommer till Möbiusfunktioner längre fram!

Låt oss härnäst titta på exponentialfunktionen $y = e^x$. Hur ska dess komplexa fortsättning $w = e^z$ definieras? Vad ska man t.ex. mena med e^{5+2i} ?

Följande tre krav på e^z är naturliga:

1. för *reella* z fås den reella exponentialfunktionen: $e^{x+i0} = e^x$;
2. då z är rent *imaginär* har vi tidigare sett att $e^{0+iy} = e^{iy} = \cos y + i \sin y$;
3. för godtyckliga z_1 och z_2 bör potensregeln $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ gälla.

Observera först att om dessa tre krav gäller, så kan e^z bara definieras på ett enda sätt:

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} = \{ \text{enligt 3} \} = e^x \cdot e^{iy} = \{ \text{enligt 1 och 2} \} \\ &= e^x \cdot (\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y. \end{aligned}$$

Men det är inte alldeles säkert att denna funktion uppfyller det tredje kravet för *godtyckliga* z_1 och z_2 , utan detta måste kontrolleras:

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1+iy_1} \cdot e^{x_2+iy_2} \\ &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{x_1} e^{x_2} (\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i (\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2)) \\ &= e^{x_1+x_2} (\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) \\ &= e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

SLUTSATS. Det finns en *unikt bestämd* funktion e^z med egenskaperna $e^{x+i0} = e^x$, $e^{0+iy} = \cos y + i \sin y$ och $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, nämligen

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y.$$

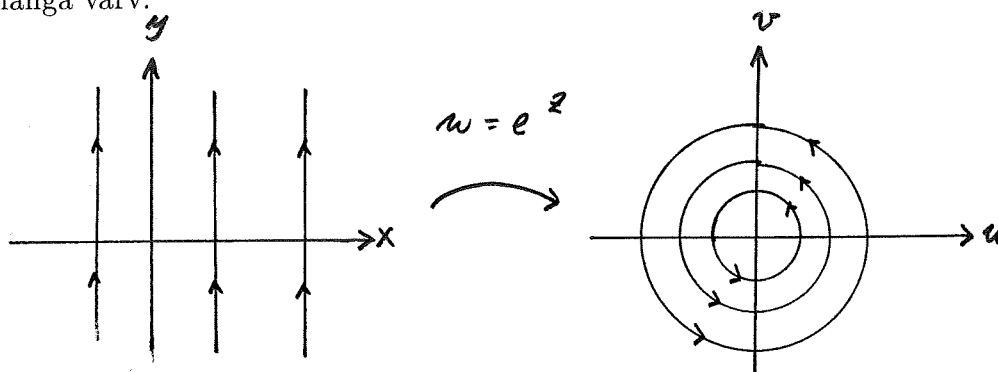
Med $w = u + iv$ ser vi att

$$w = e^z \Leftrightarrow \begin{cases} u = e^x \cos y, \\ v = e^x \sin y. \end{cases}$$

För att förstå hur denna avbildning från xy -planet till uv -planet fungerar, tittar vi först på de vertikala linjerna $x = a = \text{konstant}$:

$$u = e^a \cos y, \quad v = e^a \sin y \Rightarrow u^2 + v^2 = e^{2a}(\cos^2 y + \sin^2 y) = e^{2a},$$

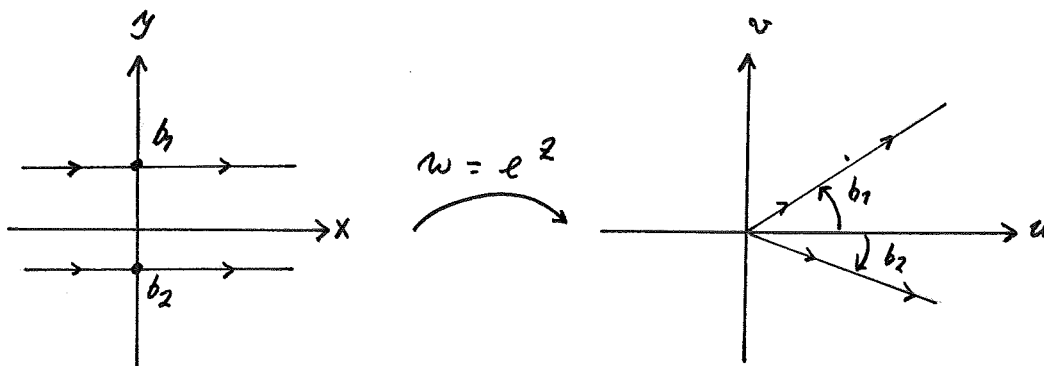
vilket innebär att linjen $\{x = a, y = \text{godtycklig}\}$ avbildas på cirkeln $u^2 + v^2 = (e^a)^2$ i uv -planet. Då y växer från y_0 till $y_0 + 2\pi$ genomlöps cirkeln ett varv i positiv led; då y växer från $-\infty$ till $+\infty$ genomlöps bildcirkeln oändligt många varv:



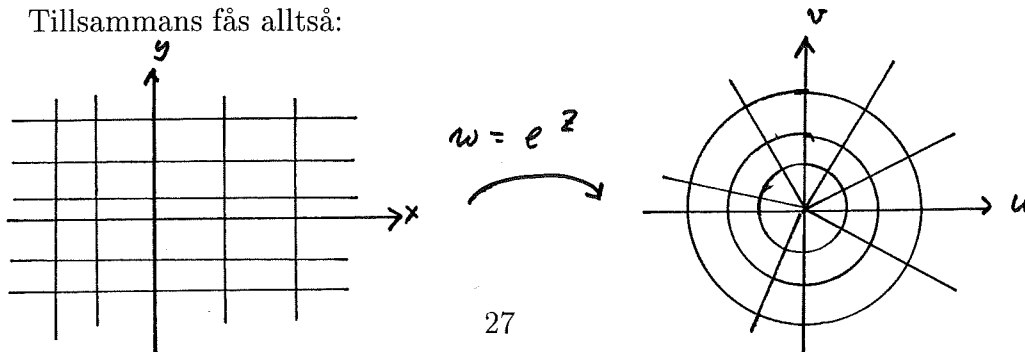
Då $y = b = \text{konstant}$ och x växer från $-\infty$ till $+\infty$, fås

$$w = u + iv = e^x(\cos b + i \sin b) = e^x \cdot e^{ib}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

vilket är en halvlinje i uv -planet som går från origo till oändligheten med lutningsvinkeln b :



Tillsammans fås alltså:



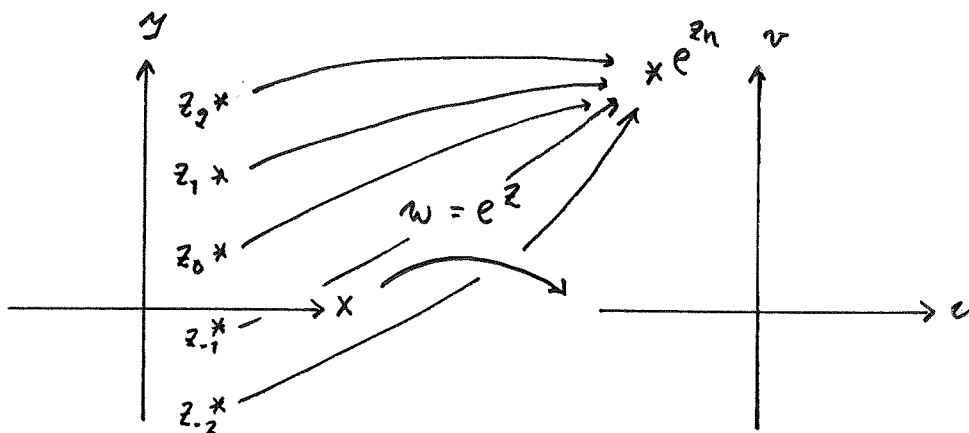
I reella analysen gäller att $y = e^x \iff x = \ln y$, d.v.s. exponential- och logaritmfunktionerna är varandras inverser. Kan vi definiera den komplexa logaritmen på samma sätt – som inversen till e^z ?

Notera först att om

$$z_n = a + ib + i \cdot 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

så avbildas *alla* dessa oändligt många punkter i z -planet på *en och samma punkt* i w -planet, nämligen

$$\begin{aligned} e^{z_n} &= e^{a+ib+i \cdot 2\pi n} = e^a (\cos(b + 2\pi n) + i \sin(b + 2\pi n)) \\ &= e^a (\cos b + i \sin b) = e^a \cos b + i e^a \sin b : \end{aligned}$$



Detta betyder att om e^z har en invers, så måste denna vara oändligt mångtydig – vilket är lika tragiskt som oundvikligt. För att bestämma inversen – som vi kallar för $\log z$ – låter vi $w \neq 0$ vara godtycklig. Skriv w på polär form:

$$w = r e^{i\theta}, \quad \text{där alltså } r > 0.$$

Vi vill lösa ut z ur ekvationen $w = e^z$, eller, med $z = x + iy$,

$$r \cdot e^{i\theta} = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}.$$

Påminnelse: Om t är ett reellt tal, så är $|e^{it}| = 1$, eftersom

$$|e^{it}| = |\cos t + i \sin t| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1,$$

p.g.a. trigonometriska ettan.

Nu gäller allmänt att om de komplexa talen $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ och $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ är lika, så måste dessa vektorer ha *samma längd*: $|z_1| = |z_2|$ eller $r_1 = r_2$, och argumenten måste vara lika på en multipel av 2π när, d.v.s. $\theta_2 = \theta_1 + 2\pi n$, där n är ett godtyckligt heltal.

Så i vårt fall får vi att $r \cdot e^{i\theta} = e^x \cdot e^{iy}$ är ekvivalent med att

$$r = e^x, \quad \text{eller } x = \ln r = \ln |w|,$$

och

$$y = \theta + 2\pi n = \arg w.$$

SLUTSATS. $w = e^z \iff z = \ln |w| + i \arg w.$

Om vi låter w och z byta plats så blir därmed följande definition naturlig:

$$z \neq 0 \implies \log z = \ln |z| + i \arg z,$$

där \ln är den vanliga reella logaritmen och $\arg z$ som vanligt är flertydig.

Exempel 1. $\log 5 = \ln 5 + i \arg 5 = \ln 5 + i \cdot 2\pi n$, vilket förklarar varför det är lämpligt att använda olika beteckningar för den reella och den komplexa logaritmfunktionen.

Exempel 2. $x =$ negativt reellt tal \implies

$$\log x = \ln |x| + i \arg x = \ln |x| + i \cdot (2n + 1)\pi.$$

Exempel 3. $\log(1 + i) = \log(\sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}) = \ln(2^{1/2}) + i(\pi/4 + 2\pi n)$
 $= \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{i\pi}{4} + i \cdot 2\pi n.$

Låt oss också kontrollera logaritmlagen $\log(z_1 \cdot z_2) = \log z_1 + \log z_2$:

$$\begin{aligned} \log(z_1 \cdot z_2) &= \log(r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2}) = \log(r_1 r_2 \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2)}) \\ &= \ln(r_1 r_2) + i(\theta_1 + \theta_2 + 2\pi n) = \ln r_1 + i\theta_1 + \ln r_2 + i\theta_2 + i 2\pi n \\ &= \log z_1 + \log z_2. \end{aligned}$$

Observera att båda leden i $\log(z_1 \cdot z_2) = \log z_1 + \log z_2$ består av *oändligt många punkter i det komplexa planet*, och att likhetstecknet innebär att *dessa punktmängder är lika.*

För att förstå logaritmens avbildningsegenskaper kan vi t.ex. titta på hur cirklar $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R = \text{konstant}, \arg z = \text{godtycklig}\}$ omkring origo avbildas:

$$w = u + iv = \log z = \log (R \cdot e^{i \arg z}) = \ln R + i \arg z \Leftrightarrow \begin{cases} u = \ln R, \\ v = \arg z. \end{cases}$$

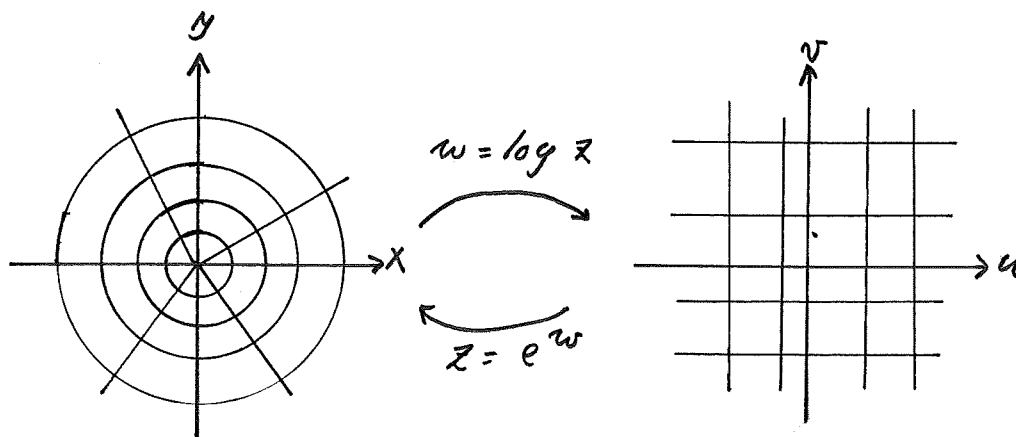
Bildkurvan blir alltså den vertikala linjen $\{u = \ln R = \text{konstant}, v = \text{godtycklig}\}$ i uv -planet.

Halvlinjen $\{z = r \cdot e^{i\theta_0} \mid 0 < r < \infty, \theta_0 = \text{fix vinkel}\}$ avbildas på

$$w = u + iv = \log z = \log (r \cdot e^{i\theta_0}) = \ln r + i\theta_0 + i2\pi n \Leftrightarrow \begin{cases} u = \ln r, \\ v = i\theta_0 + i2\pi n, \end{cases}$$

där $-\infty < \ln r < +\infty$, så att bilden av halvlinjen består av en uppsättning horisontella linjer i uv -planet med avståndet 2π mellan två närliggande linjer.

Tillsammans fås:



5. Derivator och CR ekvationerna

Som bekant definieras derivatan av en *reell funktion* $f(x)$ genom

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Observera att Δx kan gå mot 0 på i princip två olika sätt: *från vänster* eller *från höger* (eller mera perverst kan Δx oscillera omkring 0), och att definitionen ovan innebär att gränsvärdena från dessa båda håll *skall finnas* och dessutom *vara lika*.

Derivatan av en *komplex funktion* $f(z)$ definieras analogt:

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Men notera att här kan Δz gå mot 0 i *oändligt många riktningar*, eftersom

$$\Delta z = |\Delta z| \cdot e^{i \arg \Delta z} \rightarrow 0 \iff |\Delta z| \rightarrow 0, \text{ medan } \arg \Delta z \text{ är godtycklig.}$$

Och i definitionen ovan krävs att gränsvärdet av $\Delta f / \Delta z$ ska finnas och vara lika för *alla* riktningar. Funderar man lite på detta kan det verka som att enbart *konstanta* komplexa funktioner kan vara deriverbara i denna mening, men riktigt *så illa* är det inte – i själva verket ska vi se att alla *elementära funktioner är deriverbara*, och att dessutom derivatorna ser ut precis som i det reella fallet, d.v.s.,

$$\frac{d}{dz}(z^2) = 2z, \quad \frac{d}{dz}(e^z) = e^z, \quad \frac{d}{dz}(\log z) = \frac{1}{z}, \quad \text{och så vidare.}$$

MEN – kravet på komplex deriverbarhet är ett *väldigt starkt krav*, och medför bl.a. att

$$f(z) \text{ är deriverbar} \implies f(z) \text{ är automatiskt oändligt deriverbar,}$$

vilket inte alls är sant i det reella fallet – ELLER HUR?

Exempel. Om n är ett positivt heltal, så gäller binomialformeln

$$(z + \Delta z)^n = z^n + \frac{n}{1} z^{n-1} \Delta z + \frac{n(n-1)}{2!} z^{n-2} (\Delta z)^2 + \dots + (\Delta z)^n$$

med exakt samma bevis som i det reella fallet. Härav följer att

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(z^n) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \left(z^n + nz^{n-1}\Delta z + \frac{n(n-1)}{2}z^{n-2}(\Delta z)^2 + \dots + (\Delta z)^n - z^n \right) \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (nz^{n-1} + \mathcal{O}(\Delta z)) = nz^{n-1}, \end{aligned}$$

– precis som i den reella analysen.

Följande deriveringsregler följer direkt från definitionen, och bevisas på samma sätt som i det reella fallet:

- $\frac{d}{dz} \left(\sum_{k=1}^n a_k f_k(z) \right) = \sum_{k=1}^n a_k \frac{df_k}{dz}$, om a_1, \dots, a_n är konstanter,
- $\frac{d}{dz} (f(z) \cdot g(z)) = \frac{df}{dz} \cdot g(z) + f(z) \cdot \frac{dg}{dz}$,
- $\frac{d}{dz} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{g(z) \cdot f'(z) - f(z) \cdot g'(z)}{(g(z))^2}$,
- $\frac{d}{dz} (f(g(z))) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$.

Låt

$$P_n(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$$

vara ett polynom av graden n . Från reglerna ovan följer det att

$$\frac{dP_n}{dz} = a_1 + a_2 \cdot 2z + a_3 \cdot 3z^2 + \dots + a_n \cdot nz^{n-1},$$

vilket är som det borde vara.

Om $P(z)$ och $Q(z)$ är polynom, så följer det vidare att

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \right) = \frac{Q(z) \cdot P'(z) - P(z) \cdot Q'(z)}{(Q(z))^2}$$

närhelst $Q(z) \neq 0$.

För att undersöka deriverbarheten för allmännare funktioner visar det sig vara lämpligt att dela upp dessa i real- och imaginärdelar. Med $w = u + iv$ och $z = x + iy$ får vi

$$w = f(z) \iff u + iv = \operatorname{Re} f(x, y) + i \operatorname{Im} f(x, y)$$

eller

$$\begin{cases} u = u(x, y) := \operatorname{Re} f(x, y), \\ v = v(x, y) := \operatorname{Im} f(x, y), \end{cases}$$

där $:=$ betyder "definieras som". Med dessa beteckningar följer det att

$$\frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta x + i\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Specialfall 1: $\Delta y = 0 \implies$

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y) + i(v(x + \Delta x, y) - v(x, y))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Specialfall 2: $\Delta x = 0 \implies$

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \lim_{i\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y) + i(v(x, y + \Delta y) - v(x, y))}{i\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{i} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{eftersom } 1/i = -i). \end{aligned}$$

Men enligt definitionen på deriverbarhet ska vi få *samma gränsvärde* oavsett Δz :s riktning, så dessa båda specialfall måste ge samma resultat:

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y},$$

varav följer de s.k. *Cauchy-Riemann-ekvationerna*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Eftersom dessa förekommer så ofta brukar man förkorta dem till *CR-ekvationerna*.

Exempel 1:

$$w = z^2 \iff u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy \iff \begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = 2xy. \end{cases}$$

Så här är

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x,$$

och vi ser att CR ekvationerna är uppfyllda – som de *måste* vara eftersom vi vet att z^2 är deriverbar:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Exempel 2:

$$w = e^z \iff u + iv = e^x \cos y + i e^x \sin y \iff \begin{cases} u = e^x \cos y, \\ v = e^x \sin y, \end{cases}$$

varför

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{och} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

så även i detta fall är CR ekvationerna uppfyllda. Härav skulle vi vilja sluta att e^z är deriverbar, men haken är att än så länge vet vi bara att *komplex deriverbarhet* \implies CR, och inte att \Leftarrow gäller. Observera dock att *om* e^z vore deriverbar, så *måste* i så fall

$$\frac{d}{dz} e^z = \frac{\partial}{\partial x} (e^x \cos y + i e^x \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z,$$

vilket verkar hoppfullt.

Vi behöver alltså följande resultat.

SATS. Om de reella funktionerna $u(x, y)$ och $v(x, y)$ är kontinuerligt deriverbara och uppfyller CR ekvationerna, så är $u(x, y) + iv(x, y)$ en deriverbar komplex funktion $f(z)$.

För att bevisa detta påminner vi om följande sats från den reella analysen: Om $g(x, y)$ har kontinuerliga förstaderivator, så är

$$\Delta g := g(x + \Delta x, y + \Delta y) - g(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y,$$

där ϵ_1 och ϵ_2 går mot 0 då $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$.

Bevis av att CR \implies komplex deriverbarhet: Enligt ovan kan vi skriva

$$\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + i \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + i \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \epsilon_x \Delta x + \epsilon_y \Delta y}{\Delta x + i\Delta y},$$

där ϵ_x och ϵ_y innehåller bidrag både från Δu och Δv , och går mot 0 då $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$. Enligt CR ekvationerna kan vi byta

$$\frac{\partial u}{\partial y} \text{ mot } -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{och} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \text{ mot } \frac{\partial u}{\partial x},$$

och får då att

$$\begin{aligned} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + \epsilon_x \Delta x + \epsilon_y \Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + \epsilon_x \cdot \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} + \epsilon_y \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}. \end{aligned}$$

Nu är

$$\frac{|\Delta x|}{|\Delta x + i\Delta y|} = \frac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \leq 1,$$

och på samma sätt inser man att

$$\frac{|\Delta y|}{|\Delta x + i\Delta y|} \leq 1.$$

Därmed fås att

$$\left| \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right| \leq |\epsilon_x| + |\epsilon_y| \rightarrow 0 \quad \text{då } (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0),$$

det vill säga

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta z} = \lim_{\Delta x + i\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x},$$

vilket betyder att $u(x, y) + i v(x, y)$ är komplext deriverbar. \square

Anmärkning. Komplexkonjugering av $z = x + iy$ ger $\bar{z} = x - iy$, och tillsammans fås

$$\begin{cases} z = x + iy, \\ \bar{z} = x - iy. \end{cases}$$

Löser vi ut x och y ur detta system, så får vi istället

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \\ y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}). \end{cases}$$

Kedjeregeln applicerad på detta variabelbyte ger att

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Om x byts mot $\frac{1}{2}(z + \bar{z})$ och y mot $\frac{1}{2i}(z - \bar{z})$, så blir $u(x, y) + iv(x, y)$ en funktion av z och \bar{z} , som kan deriveras med avseende på \bar{z} :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u + iv) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Genom att jämföra real- och imaginärdelar ser vi att

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u + iv) = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \iff \text{CR ekvationerna.}$$

SLUTSATS. $u + iv$ uppfyller CR ekvationerna $\iff \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u + iv) = 0 \iff u + iv$ beror bara på z (och alltså inte på \bar{z}) $\iff u + iv = f(z)$.

Exempel. $w = e^z \iff u + iv = e^x \cos y + i e^x \sin y$. Här är alltså $u = e^x \cos y$ och $v = e^x \sin y$, som båda är oändligt deriverbara (i reell mening). Eftersom

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{och} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

så är CR ekvationerna uppfyllda, varav följer att e^z är deriverbar med avseende på z . Derivatans fås t.ex. genom att derivera i x -riktningen:

$$\frac{d}{dz} e^z = \frac{\partial}{\partial x} (e^x \cos y + i e^x \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z.$$

För att undersöka derivatan av

$$\log z = \ln |z| + i \arg z = \ln r + i\theta + i \cdot 2\pi n$$

kan man via kedjeregeln transformera om CR ekvationerna till polära koordinater, och sedan resonera som ovan. Eller också kan man acceptera följande resultat.

SATS. Om $w = f(z)$ är deriverbar och om inversen $z = f^{-1}(w)$ finns, så är inversen också deriverbar.

Härav följer att

e^z deriverbar \implies inversa funktionen $\log z$ är också deriverbar.

Genom att derivera identiteten $z = e^{\log z}$ med avseende på z ser vi då att

$$1 = e^{\log z} \cdot \frac{d}{dz} \log z = z \cdot \frac{d}{dz} \log z,$$

så att

$$\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z} \quad \text{då } z \neq 0.$$

Kravet att $f(z)$ ska vara deriverbar i hela sitt definitionsområde \mathcal{D} förutsätter att om $z \in \mathcal{D}$, så måste också $z + \Delta z \in \mathcal{D}$ närhelst $|\Delta z|$ är tillräckligt liten – vilket betyder att \mathcal{D} måste vara en *öppen delmängd* av $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Så i fortsättningen betraktar vi endast *deriverbara funktioner $f(z)$ definierade i öppna delmängder av \mathbb{C}* .

Exempel. Polynom och exponentialfunktionen är definierade i hela \mathbb{C} . Logaritmfunktionen $\log z$ är definierad i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. En rationell funktion $P(z)/Q(z)$ är definierad utom i nämnarens nollställen.

Från den reella analysen minns vi kanske att en funktion $g(x)$ sägs vara *analytisk* på ett intervall (a, b) om det för varje $x_0 \in (a, b)$ finns ett $R > 0$ så att $g(x)$ kan skrivas som en *konvergent Taylorserie* i intervallet $(x_0 - R, x_0 + R)$:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \text{då } |x - x_0| < R.$$

Följande förvånansvärda sats gäller i den komplexa analysen:

SATS. Antag att $f(z)$ är deriverbar en enda gång i en öppen mängd \mathcal{D} . För varje $z_0 \in \mathcal{D}$ gäller då att

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

när $|z - z_0| <$ kortaste avståndet från z_0 till randen av \mathcal{D} .

Speciellt är $f(z)$ oändligt deriverbar i \mathcal{D} .

På grund av denna sats säger man att

$f(z)$ är *analytisk* i en öppen mängd $\mathcal{D} \iff f'(z)$ finns i \mathcal{D} .

Som en omedelbar följsats till satsen ovan fås:

SATS. $f(z)$ analytisk i $\mathcal{D} \implies u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ och $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ är oändligt deriverbara i \mathcal{D} (som reella 2-variabelsfunktioner).

CR ekvationerna ger restriktioner för real- och imaginärdelarna $u(x, y)$ och $v(x, y)$ av en analytisk funktion $f(z)$. T.ex. fås att

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \left\{ \text{då } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \left\{ \text{då } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \right\} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

eller

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

På samma sätt ser man att

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Ekvationen

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$$

för en reell funktion $g(x, y)$ kallas för *Laplaces ekvation*. Denna kommer att dyka upp senare i diverse olika tillämpade ämnen.

Eftersom Laplaces ekvation förekommer så ofta har man infört en förkortad beteckning för Laplaceoperatorn $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – man brukar skriva

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Detta är lite olyckligt på det sättet att Δ annars betecknar "ett litet tillskott". Men denna praxis är internationellt godtagen, och i praktiken brukar det framgå ur sammanhanget vad Δ står för.

DEFINITION. En reell funktion $g(x, y)$ med kontinuerliga andraderivator sägs vara *harmonisk* om $\Delta g = 0$.

Vi har alltså visat följande resultat.

SATS. *Real- och imaginärdelarna till analytiska funktioner är automatiskt harmoniska.*

I nästa avsnitt ska vi gå igenom en hel rad analytiska funktioner, och med hjälp av satsen ovan kan vi sedan hitta en massa harmoniska funktioner genom att bilda real- och imaginärdelar av våra analytiska funktioner. Låt oss se på några exempel som kommer från de få analytiska funktioner som vi lärt oss hittills!

1. z^3 analytisk i hela z -planet $\implies \operatorname{Re} z^3$ och $\operatorname{Im} z^3$ är harmoniska i hela xy -planet.

Om vi sätter in $a = x$ och $b = iy$ i den välkända formeln $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, så ser vi att

$$\begin{aligned} z^3 &= (x + iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 \\ &= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3), \end{aligned}$$

varav följer att $x^3 - 3xy^2$ och $3x^2y - y^3$ är harmoniska.

2. $\log z = \ln |z| + i \arg z$ analytisk då $z \neq 0 \implies$ dess real- och imaginärdelar är harmoniska utanför origo i xy -planet.

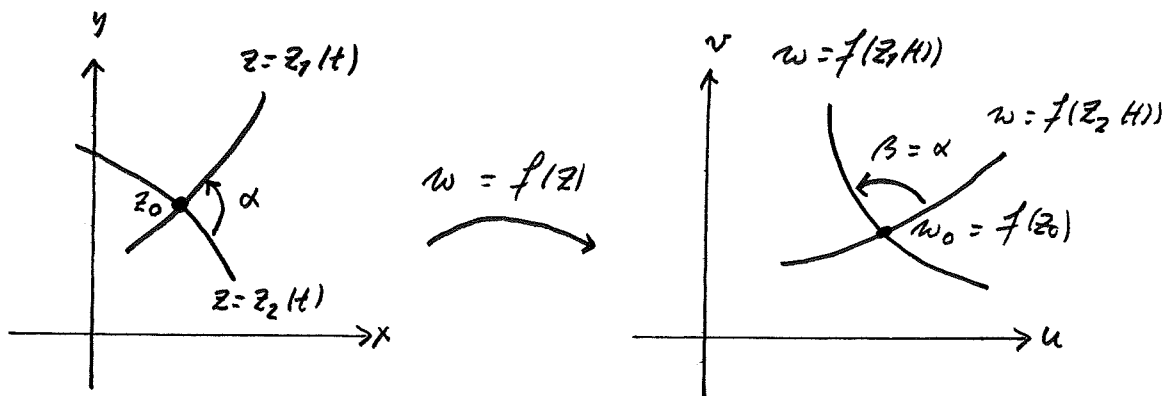
D.v.s., $\ln |z| = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ är harmonisk då $(x, y) \neq (0, 0)$, och $\arg z$ är harmonisk då $z \neq 0$. I högra halvplanet kan vi göra $\arg z$ entydig genom att kräva att $-\pi/2 < \arg z < \pi/2$, och då blir $\arg z = \arctan(y/x)$, varav följer att $\arctan(y/x)$ är harmonisk då $x > 0$.

3. e^z analytisk i hela planet $\implies \operatorname{Re} e^z = e^x \cos y$ och $\operatorname{Im} e^z = e^x \sin y$ är harmoniska i hela xy -planet.

Den som vill må gärna kontrollera att dessa harmoniska funktioner verkligen uppfyller Laplaces ekvation!

När vi tidigare tittade på avbildningsegenskaper för analytiska funktioner såg vi att räta vinklar tycks bevaras. Mera allmänt gäller följande.

SATS. Om $f'(z_0)$ finns och är $\neq 0$, så bevarar avbildningen $w = f(z)$ vinklar (inklusive deras riktningar) vid z_0 :



Bevis. Om v_1 är en vektor i punkten $z_0 = x_0 + iy_0 = (x_0, y_0)$, så finns en kurva $t \mapsto z_1(t) = (x_1(t), y_1(t))$ med egenskapen att

$$v_1 = \frac{dz_1}{dt}(0) = \dot{z}_1(0) = \dot{x}_1(0) + i\dot{y}_1(0) = (\dot{x}_1(0), \dot{y}_1(0)),$$

där $\dot{}$ betecknar t -derivatan. Låt $v_2 = \dot{z}_2(0)$ vara en annan vektor vid z_0 . Uppenbarligen ges vinkeln mellan v_1 och v_2 av

$$\alpha = \arg \dot{z}_1(0) - \arg \dot{z}_2(0).$$

Bilden av vektorn v_k (där $k = 1, 2$) under $w = f(z)$ ges av

$$f_*(v_k) := \frac{d}{dt} f(z_k(t)) \Big|_{t=0} = f'(z_0) \cdot \dot{z}_k(0),$$

där kedjeregeln har använts vid derivationen. Om $f'(z_0) = 0$ så fås nollvektorer, och vinkeln mellan dessa saknar naturligtvis mening. Men om $f'(z_0) \neq 0$ så blir vinkeln mellan bildvektorerna lika med

$$\begin{aligned} \beta &= \arg(f_*(v_1)) - \arg(f_*(v_2)) \\ &= \arg f'(z_0) + \arg \dot{z}_1(0) - (\arg f'(z_0) + \arg \dot{z}_2(0)) \\ &= \arg \dot{z}_1(0) - \arg \dot{z}_2(0) \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

□

DEFINITION. En avbildning sägs vara *konform* om den bevarar vinklar.

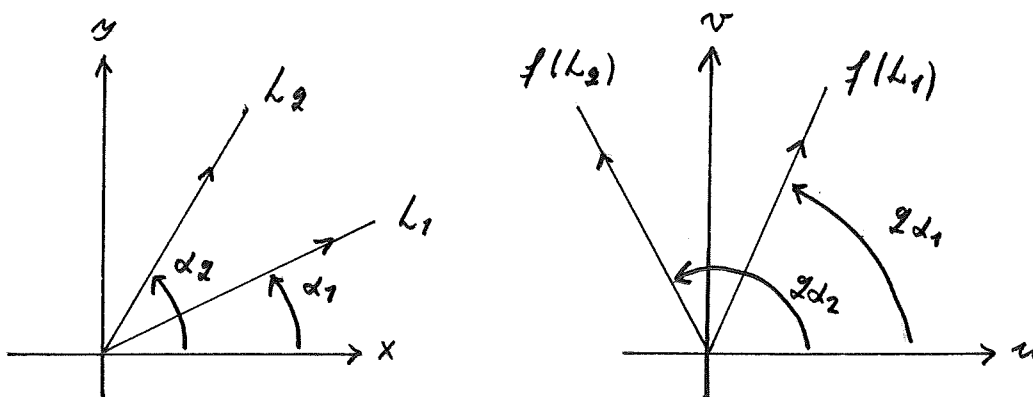
Så vi har alltså sett att en analytisk funktion $w = f(z)$ ger en konform avbildning där $f'(z) \neq 0$.

Exempel. Om $f(z) = z^2$, så är

$$\frac{df}{dz} = 2z, \quad \text{så att} \quad \frac{df}{dz} = 0 \iff z = 0.$$

Vad händer då $z = 0$? Betrakta två halvlinjer

$$L_k := \{z = r \cdot e^{i\alpha_k} \mid 0 \leq r < \infty\} :$$



Eftersom $z = r \cdot e^{i\alpha_k}$ avbildas på $z^2 = r^2 \cdot e^{i \cdot 2\alpha_k}$, blir bildkurvorna nya halvlinjer:

$$f(L_k) = \{w = R \cdot e^{i \cdot 2\alpha_k} \mid 0 \leq R < \infty\},$$

och vinkeln mellan dessa har uppenbarligen fördubblats.

SENS MORAL: Vinklar bevaras vanligtvis *inte* i punkter där $f'(z_0) = 0$.

6. Övriga elementära funktioner

Hur ska *potensfunktionen*

$$y = x^a, \quad a = \text{godtyckligt reellt tal,}$$

definieras i det komplexa fallet? Det vill säga, vad ska vi mena med

$$w = z^c,$$

där c är ett godtyckligt komplext tal? Jo, eftersom exponential- och logaritmfunktionerna är varandras inverser, så är

$$z = e^{\log z},$$

och det är därför naturligt att sätta

$$z^c = (e^{\log z})^c := e^{c \log z}.$$

Exempel 1.

$$\begin{aligned} (1+i)^i &= e^{i \log(1+i)} = e^{i(\ln|1+i| + i \arg(1+i))} \\ &= e^{i(\ln \sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2\pi n))} = e^{\frac{i \ln 2}{2} - \frac{\pi}{4} - 2\pi n} \\ &= e^{-\frac{\pi}{4}} \left(\cos \frac{\ln 2}{2} + i \sin \frac{\ln 2}{2} \right) \cdot e^{2\pi m}, \quad \text{där } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Exempel 2. $z = r \cdot e^{i\theta} \implies$

$$\begin{aligned} \sqrt{z} &= z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \log z} = e^{\frac{1}{2}(\ln|z| + i \arg z)} \\ &= e^{\frac{1}{2}(\ln r + i(\theta + 2\pi n))} = e^{\frac{1}{2} \ln r} \cdot e^{i\theta/2} \cdot e^{i\pi n} \\ &= (e^{\ln r})^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i\theta/2} \cdot (-1)^n = r^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i\theta/2} \cdot (\pm 1) \\ &= \pm \sqrt{r} \cdot e^{i\theta/2}. \end{aligned}$$

Observera att till skillnad mot det reella fallet så är alltså plusminustecknet inbyggt i kvadratroten!

Om c är en konstant och z är en variabel, så är

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(z^c) &= \frac{d}{dz}(e^{c \log z}) = e^{c \log z} \cdot \frac{d}{dz}(c \log z) \\ &= z^c \cdot c \cdot \frac{1}{z} = c \cdot z^{c-1}, \end{aligned}$$

vilket känns bekant. Låter vi z och c byta roller, så fås istället

$$\frac{d}{dz}(c^z) = \frac{d}{dz}(e^{z \log c}) = e^{z \log c} \cdot \log c = c^z \cdot \log c.$$

Låt oss också kontrollera att den vanliga potensregeln $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ fortsätter att gälla i det komplexa fallet:

$$z^{c_1} \cdot z^{c_2} = e^{c_1 \log z} \cdot e^{c_2 \log z} = e^{(c_1+c_2) \log z} = z^{c_1+c_2}.$$

Härnäst frågar vi oss hur de trigonometriska funktionerna bör definieras ute i det komplexa planet. Om θ är en reell vinkel mellan 0 och $\pi/2$, så definieras $\sin \theta$ med hjälp av en rätvinklig triangel innehållande vinkeln θ som

$$\sin \theta = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusan}},$$

men vad gör man då θ är en *komplex* vinkel?

Idén består i att utgå från formeln

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad \text{där } x \in \mathbb{R}.$$

Om vi lägger till den ekvation som fås genom att byta i mot $-i$, så får vi systemet

$$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i \sin x, \\ e^{-ix} = \cos x - i \sin x. \end{cases}$$

Här kan vi lösa ut $\cos x$ och $\sin x$:

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \\ \sin x &= \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}). \end{aligned}$$

Observera nu att om vi byter ut den reella variabeln x mot en komplex variabel z , så är högerledena fortfarande väldefinierade – eftersom e^z finns för alla komplexa tal z . Vi leds därmed till följande definition.

DEFINITION. $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ och $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$.

Låt oss kontrollera att denna *a priori* märkliga definition ger formler som vi är vana vid! T.ex. ser vi att

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} \cos z &= \frac{1}{2} (e^{iz} \cdot i + e^{-iz} \cdot (-i)) = \frac{i}{2} (e^{iz} - e^{-iz}) = -\frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) \\ &= -\sin z,\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} \sin z &= \frac{1}{2i} (e^{iz} \cdot i - e^{-iz} \cdot (-i)) = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) \\ &= \cos z.\end{aligned}$$

Vidare är

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \frac{1}{4} (e^{2iz} + 2e^0 + e^{-2iz}) - \frac{1}{4} (e^{2iz} - 2e^0 + e^{-2iz}) = \frac{1}{4} (2+2) = 1,$$

så att den trigonometriska ettan gäller även i det komplexa fallet. Och hur är det med additionsformeln för sinus:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta ?$$

Jodå, den är sann även i den komplexa teorien, och till på köpet är beviset mycket enklare här eftersom man inte behöver göra några finurliga geometriska konstruktioner, utan kan räkna på mekaniskt:

$$\begin{aligned}\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 &= \frac{1}{4i} (e^{iz_1} - e^{-iz_1}) (e^{iz_2} + e^{-iz_2}) + \frac{1}{4i} (e^{iz_1} + e^{-iz_1}) (e^{iz_2} - e^{-iz_2}) \\ &= \frac{1}{4i} \{ e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)} \\ &\quad + e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)} \} \\ &= \frac{1}{4i} (2e^{i(z_1+z_2)} - 2e^{-i(z_1+z_2)}) \\ &= \frac{1}{4i} \cdot 2 \cdot 2i \cdot \frac{1}{2i} (e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}) \\ &= \sin(z_1 + z_2).\end{aligned}$$

Allmänt kan man visa att

Alla välbekanta trigonometriska formler från den reella analysen fortsätter att gälla i den komplexa teorien.

Med $\sin z$ och $\cos z$ väldefinierade sätts naturligtvis

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad \text{och} \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

som är definierade utom i respektive nämnarens nollställen.

Detta leder osökt till frågan om vilka nollställen som exempelvis sinusfunktionen har i det komplexa planet – så låt oss undersöka detta:

$$\begin{aligned} 0 = \sin z &= \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) \iff e^{iz} = e^{-iz} \iff \\ e^{2iz} &= 1 = e^{i2\pi n} \iff z = \pi n, \quad n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned}$$

d.v.s. $\sin z$ har inte några andra nollställen än sina vanliga reella. På analogt sätt visar man att

$$\cos z = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

En *viktig skillnad* mot det reella fallet är att $|\sin z|$ och $|\cos z|$ *inte är begränsade av 1*, utan kan bli hur stora som helst ute i det komplexa planet. Låt oss t.ex. titta på $|\sin z|^2$ – eller, för att göra räkningarna lite enklare, $4|\sin z|^2$:

$$\begin{aligned} 4|\sin z|^2 &= |2i \sin z|^2 = |e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}|^2 = |e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^y|^2 \\ &= |(\cos x + i \sin x)e^{-y} - (\cos x - i \sin x)e^y|^2 \\ &= |\cos x(e^{-y} - e^y) + i \sin x(e^{-y} + e^y)|^2 \\ &= \cos^2 x (e^{-2y} - 2 + e^{2y}) + \sin^2 x (e^{-2y} + 2 + e^{2y}) \\ &= (e^{2y} + e^{-2y}) \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x) - 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= e^{2y} + e^{-2y} - 2 \cos 2x \\ &\geq e^{2y} + e^{-2y} - 2 = (e^y - e^{-y})^2 \\ &= 4 \sinh^2 y, \end{aligned}$$

det vill säga,

$$|\sin(x + iy)| \geq |\sinh y|, \quad \text{som} \rightarrow \infty \text{ då } y \rightarrow \pm\infty.$$

Inversfunktionerna $\arcsin z$ och $\arccos z$ definieras på det naturliga sättet:

DEFINITION. $w = \arcsin z \iff z = \sin w$ och $w = \arccos z \iff z = \cos w$.

I den reella analysen ger denna inversbildning *nya* funktioner $\arcsin x$ och $\arccos x$, som alltså inte kan uttryckas med hjälp av andra elementära funktioner. Men så är det inte i den komplexa teorien. Låt oss t.ex. beräkna $\arcsin z$ genom att lösa ut w ur ekvationen $z = \sin w$:

$$\begin{aligned} z = \sin w &\iff z = \frac{1}{2i}(e^{iw} - e^{-iw}) \iff e^{iw} - 2iz - e^{-iw} = 0 \\ &\iff (e^{iw})^2 - 2iz \cdot e^{iw} - 1 = 0 \iff e^{iw} = iz + \sqrt{-z^2 + 1} \\ &\iff iw = \log(e^{iw}) = \log(iz + \sqrt{1 - z^2}) \iff \\ w = \arcsin z &= -i \log(iz + \sqrt{1 - z^2}), \end{aligned}$$

där vi har använt det faktum att formeln för lösning av andragradsekvationer gäller ograverat i det komplexa fallet, och att plusminustecknet är inbakat i den komplexa kvadratroten. *Observera* att $\arcsin z$ är *flertydig*!

Låt oss för skojs skull beräkna derivatan av $\arcsin z$ på två sätt. Först kan vi derivera implicit:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \text{ på } z = \sin(\arcsin z) &\implies 1 = \cos(\arcsin z) \cdot \frac{d}{dz} \arcsin z \iff \\ \frac{d}{dz} \arcsin z &= \frac{1}{\cos(\arcsin z)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin z)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}, \end{aligned}$$

d.v.s. precis samma formel som i det reella fallet. Vi kan också derivera det ovan härledda uttrycket för $\arcsin z$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \arcsin z &= \frac{d}{dz} \left(-i \log(iz + \sqrt{1 - z^2}) \right) = -i \frac{i + \frac{1}{2}(1 - z^2)^{-1/2} \cdot (-2z)}{iz + \sqrt{1 - z^2}} \\ &= \frac{1 + \frac{iz}{\sqrt{1 - z^2}}}{iz + \sqrt{1 - z^2}} = \frac{\frac{\sqrt{1 - z^2} + iz}{\sqrt{1 - z^2}}}{iz + \sqrt{1 - z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}. \end{aligned}$$

$w = \arctan z$ fås analogt genom att lösa ut w ur ekvationen $z = \tan w$:

$$\begin{aligned} w = \arctan z &\iff z = \tan w = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{1}{i} \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}} \\ &\iff iz(e^{iw} + e^{-iw}) = e^{iw} - e^{-iw} \iff e^{-iw}(1 + iz) = e^{iw}(1 - iz) \\ &\iff e^{2iw} = \frac{1 + iz}{1 - iz} \iff 2iw = \log \frac{1 + iz}{1 - iz} \iff \\ w = \arctan z &= \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iz}{1 - iz} = \frac{1}{2i} (\log(1 + iz) - \log(1 - iz)). \end{aligned}$$

Deriveras detta uttryck för $\arctan z$ så fås

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \arctan z &= \frac{1}{2i} \left(\frac{i}{1 + iz} - \frac{-i}{1 - iz} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + iz} + \frac{1}{1 - iz} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 - iz + 1 + iz}{1 + z^2} = \frac{1}{1 + z^2}, \end{aligned}$$

d.v.s. samma formel som i den reella analysen.

I den reella teorien har vi också stött på de *hyperboliska funktionerna*

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \text{och} \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Eftersom e^z är väldefinierad för alla komplexa z , så generaliseras dessa uttryck omedelbart till det komplexa fallet:

$$\sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \quad \text{och} \quad \cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}).$$

Härur följer att

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = -i \sinh(iz)$$

och

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cosh(iz),$$

varför de *trigonometriska och hyperboliska funktionerna* är väldigt närbesläktade, trots att motsvarande reella funktioners grafer inte alls liknar varandra!

Vi ser att

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} \sinh z &= \frac{1}{2}(e^z - e^{-z} \cdot (-1)) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \cosh z, \\ \frac{d}{dz} \cosh z &= \frac{1}{2}(e^z + e^{-z} \cdot (-1)) = \sinh z,\end{aligned}$$

och vidare t.ex. att

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = \frac{1}{4}(e^{2z} + 2 + e^{-2z} - (e^{2z} - 2 + e^{-2z})) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1,$$

vilket är den hyperboliska ettan. För att göra det troligt att alla trigonometriska formler så när som på en eller annan teckenskillnad även gäller för de hyperboliska funktionerna, så tar vi ytterligare ett exempel ur högen:

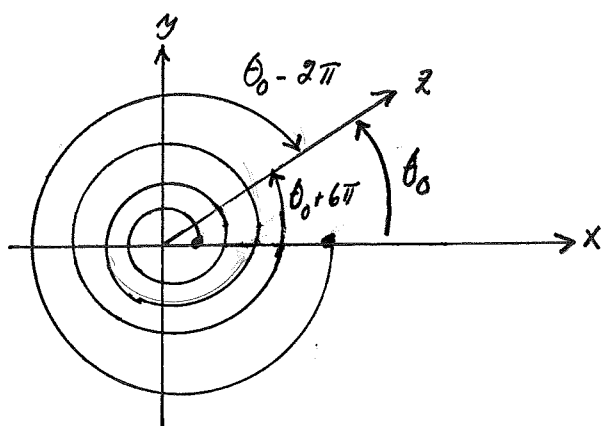
$$\begin{aligned}2 \sinh z \cosh z &= \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})(e^z + e^{-z}) = \frac{1}{2}(e^{2z} + 1 - 1 - e^{-2z}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{2z} - e^{-2z}) = \sinh 2z.\end{aligned}$$

SENS MORAL. *De elementära reella funktionerna kan på ett väldefinierat sätt fortsättas från x -axeln ut i det komplexa planet så att de blir analytiska där, och dessa fortsättningar uppfyller i stort sett alla de regler som vi är vana vid från den reella analysen.*

7. "Flertydiga funktioner"

En väldigt olustig sak som uppträtt i det föregående är förekomsten av s.k. "flertydiga funktioner" (observera att definitionsmässigt är *en funktion* = *en entydig avbildning*, så det är egentligen korkat att tala om *flertydiga funktioner* – men vad göra?).

Om man tänker efter så kommer alla dessa flertydigheter från argumentfunktionen:



$$\arg z = \theta_0 + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Nu kan man naturligtvis göra $\arg z$ entydig genom att t.ex. *kräva* att $-\pi < \arg z \leq \pi$:

DEFINITION. Med *principalargumentet* $\text{Arg } z$ menas det värde på $\arg z$ som uppfyller $-\pi < \text{Arg } z \leq \pi$.

Exempel. Om ϵ är ett pyttelitet positivt tal och $r > 0$, så är $\text{Arg}(-r + i\epsilon) \approx \pi$, medan $\text{Arg}(-r - i\epsilon) \approx -\pi$, vilket betyder att när z rör sig från $-r + i\epsilon$ till $-r - i\epsilon$ så ändras $\text{Arg } z$ med ungefär 2π . $\text{Arg } z$ är alltså *diskontinuerlig* tvärsöver negativa reella axeln – vilket inte $\arg z$ är.

DEFINITION. $\text{Log } z := \ln |z| + i \text{Arg } z$ – som alltså är en *entydig* funktion.

Då $x > 0$ är $\text{Arg}(x + i0) = 0$, vilket innebär att

$$\text{Log}(x + i0) = \ln x + i \cdot 0 = \ln x \quad \text{då } x > 0,$$

medan däremot $\log(x + i0) = \ln x + i2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Förutom att $\text{Log } z$ är diskontinuerlig tvärsöver negativa reella axeln, så behöver inte de vanliga logaritmlagarna gälla för $\text{Log } z$. T.ex. är

$$\text{Log}(i \cdot (-1 + i)) = \text{Log}(-i - 1) = \ln \sqrt{2} - i \frac{3\pi}{4},$$

medan

$$\operatorname{Log} i + \operatorname{Log}(-1 + i) = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} + \ln \sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4} = \ln \sqrt{2} + i\frac{5\pi}{4},$$

så att

$$\operatorname{Log}(i \cdot (-1 + i)) - (\operatorname{Log} i + \operatorname{Log}(-1 + i)) = -i\frac{8\pi}{4} = -2\pi i.$$

Så det är i allmänhet *inte sant* att $\operatorname{Log}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2$. Däremot ser man lätt att skillnaden mellan vänster- och högerleden alltid är en multipel av $2\pi i$. Eller, för att uttrycka detta på ett mer sofistikerat sätt,

$$\operatorname{Log}(z_1 \cdot z_2) \equiv \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 \pmod{2\pi i}.$$

SLUTSATS. Gör man en naturligt "flertydig" funktion entydig på ett eller annat sätt, så får man vara beredd på att man i gengäld råkar ut för andra obehagligheter.

Istället för att försöka oss på en allmän teori för flertydiga funktioner, så nöjer vi oss med att titta på ytterligare ett exempel.

Exempel. Låt oss studera funktionen

$$w = \sqrt{z^2 - 1}.$$

Enligt våra grundläggande definitioner är

$$\begin{aligned} w &= (z^2 - 1)^{1/2} = (z - 1)^{1/2} \cdot (z + 1)^{1/2} \\ &= |z - 1|^{1/2} \cdot e^{\frac{i}{2} \arg(z-1)} \cdot |z + 1|^{1/2} \cdot e^{\frac{i}{2} \arg(z+1)} \\ &= |z - 1|^{1/2} |z + 1|^{1/2} \cdot e^{\frac{i}{2}(\arg(z-1) + \arg(z+1))}. \end{aligned}$$

Här är $|z-1|^{1/2}|z+1|^{1/2}$ en entydig reell funktion, medan $\arg(z-1) + \arg(z+1)$ innehåller en godtycklig multipel av 2π . Eftersom

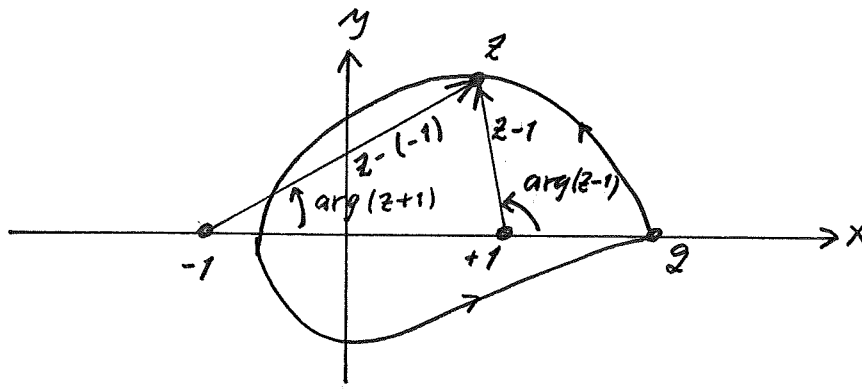
$$e^{\frac{i}{2} \cdot 2\pi n} = e^{i\pi n} = (e^{i\pi})^n = (-1)^n = \pm 1,$$

så är $w = \sqrt{z^2 - 1}$ en *tvåtydig* funktion – de båda möjliga värdena skiljer sig åt med ett tecken. T.ex. är

$$w(2) = |2 - 1|^{1/2} |2 + 1|^{1/2} \cdot e^{\frac{i}{2}(2\pi n + 2\pi m)} = \sqrt{3} \cdot e^{i\pi(n+m)} = \pm\sqrt{3}.$$

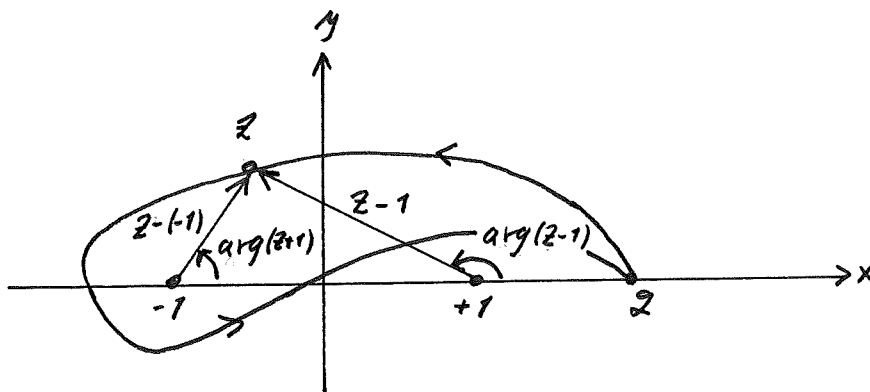
Låt oss här *välja* det ena av dessa båda möjliga värden på $w(2)$ – säg $w(2) = +\sqrt{3}$ – och låt oss sedan undersöka vad som händer med $w(z)$ då z rör sig längs olika kurvor i planet, samtidigt som $w(z)$ varierar *kontinuerligt*.

Antag att vi startar från $z = 2$ och sedan går en slinga runt punkten $z = 1$ ett varv i positiv led *utan* att gå runt punkten $z = -1$:



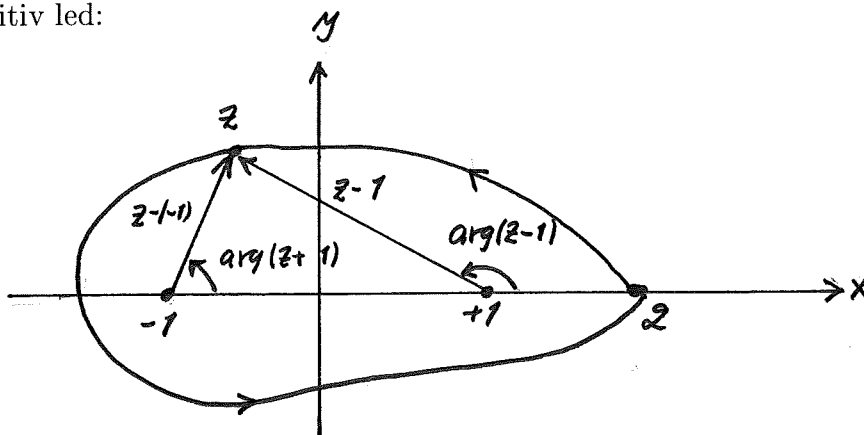
Vi ser att då slingan genomlöps så kommer $\arg(z - 1)$ att *öka med* 2π , medan totaländringen för $\arg(z + 1) = \arg(z - (-1))$ blir noll. Detta innebär att $\arg(z - 1) + \arg(z + 1)$ ökar med 2π , och därmed kommer $e^{\frac{i}{2}(\arg(z-1) + \arg(z+1))}$ att förändras med faktorn $e^{\frac{i}{2} \cdot 2\pi} = e^{i\pi} = -1$, så att slutvärdet i punkten $z = 2$ blir $w(2) = \sqrt{3} \cdot (-1) = -\sqrt{3}$.

Om vi istället går runt $z = -1$ ett varv i positiv led *utan* att gå runt $z = 1$, så kommer vi att få samma slutvärde $-\sqrt{3}$:



Men om vi däremot går runt *båda* punkterna $z = 1$ och $z = -1$ ett varv

i positiv led:

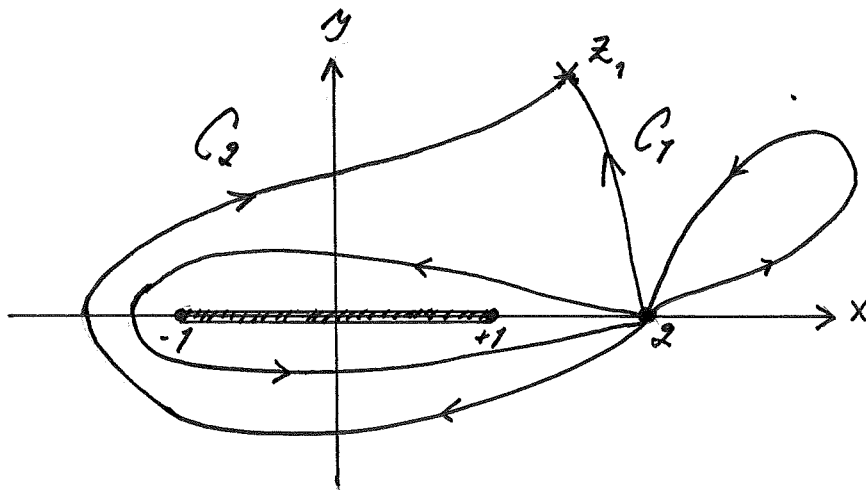


så kommer både $\arg(z-1)$ och $\arg(z-(-1))$ att öka med 2π , varför

$$e^{\frac{i}{2}(\arg(z-1)+\arg(z+1))} \text{ multipliceras med faktorn } e^{\frac{i}{2}(2\pi+2\pi)} = e^{i2\pi} = 1,$$

- d.v.s. ändras inte alls! Detta innebär att slutvärdet för w blir $w(2) = +\sqrt{3}$, så vi kommer tillbaka till det "rätta värdet".

För att förhindra att slutvärdet efter en genomlupen slinga skiljer sig från begynnelsevärdet kan vi lägga ett s.k. *snitt* mellan punkterna $z = -1$ och $z = 1$ längs rella axeln, med innebörden att det är strängeligen förbjudet att passera över detta snitt:



Om C är en sluten kurva som startar och slutar i punkten $z = 2$ utan att passera snittet, så ser vi att antingen går C inte runt någon av punkterna

$z = 1$ och $z = -1$, eller också går \mathcal{C} runt *båda* (eventuellt flera varv). Och enligt överläggningarna ovan innebär detta att efter att ha genomlöpt \mathcal{C} så kommer vi alltid tillbaka till det w -värde som vi startade med.

Och nu kan vi definiera $w = \sqrt{z^2 - 1}$ entydigt utanför snittet: om z_1 inte ligger på snittet, så väljer vi någon kurva \mathcal{C}_1 från 2 till z_1 som inte passerar snittet, och låter $\sqrt{z^2 - 1}$ variera kontinuerligt längs denna kurva utgående från startvärdet $w(2) = +\sqrt{3}$, och får därvid ett slutvärde $w(z_1)$ i z_1 (det andra möjliga värdet i z_1 är $-w(z_1)$).

Låt \mathcal{C}_2 vara en annan kurva från 2 till z_1 som inte passerar snittet. Låt oss sedan starta från z_1 med värdet $w(z_1)$ och följa \mathcal{C}_1 *baklänges* till 2; vi kommer då att få värdet $w(2) = \sqrt{3}$ där. Om vi därefter fortsätter från 2 till z_1 längs \mathcal{C}_2 , så har vi gått runt en sluten kurva från z_1 till z_1 utan att ha passerat snittet, och måste därför komma tillbaka till samma värde $w(z_1)$ som vi starade från. Men detta betyder att om vi startar från 2 och går till z_1 längs \mathcal{C}_2 , så erhåller vi precis samma slutvärde som när vi följer \mathcal{C}_1 . Eftersom slutvärdet således inte beror på den valda kurvan (så länge som denna håller sig undan från snittet), så får vår funktion ett *entydigt bestämt värde* i punkten z_1 .

Vi behöver naturligtvis inte starta från just $z = 2$, utan kan börja med att fastlägga funktionsvärdet i en godtycklig punkt z_0 utanför snittet och sedan förfara på samma sätt. Slutsatsen blir:

om vi lägger ett snitt längs reella axeln mellan +1 och -1 (som det alltså är förbjudet att passera över) och dessutom fastlägger funktionens värde i en godtycklig punkt utanför snittet, så blir vår funktion entydigt definierad.

Metoden att lägga in lämpliga snitt kan användas generellt för att göra flertydiga funktioner entydiga, men detta får den intresserade läsa mera om på annat håll.

8. $i\omega$ -metoden

Vid genomgången av de elementära funktionerna har vi sett att bortsett från polynom och rationella funktioner så definieras de alla med hjälp av exponentialfunktionen e^z . T.ex. fås logaritmen som inversen av e^z , potensfunktionen definieras med hjälp av exponential- och logaritmfunktionerna: $z^c = e^{c \log z}$, sinus- och cosinusfunktionerna är lineärkombinationer av exponentialfunktioner, och så vidare.

Ett annat område där exponentialfunktionen spelar en fundamental roll är inom teorin för *lineära differentialekvationer med konstanta koefficienter*.

Låt $P(x)$ vara ett polynom av graden n :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Genom att byta x mot derivationsoperatoren d/dt (där t i tillämpningarna står för tiden) fås differentialoperatoren

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) = a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0.$$

DEFINITION. Med en *lineär differentialekvation med konstanta koefficienter* menas en differentialekvation av formen

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) u = f(t),$$

där $P(x)$ är ett polynom och $f(t)$ är en given funktion.

Mera utförligt ges denna differentialekvation av

$$a_n u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = f(t).$$

Sedan tidigare vet vi att den allmänna lösningen kan skrivas som

$$u = u_{\text{hom}} + u_{\text{part}},$$

där u_{hom} är den allmänna lösningen till den *homogena* ekvationen

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) u = 0,$$

medan partikulärlösningen u_{part} är *någon* lösning till originalekvationen.

Den homogena lösningen är enklast: ansatsen $u_{\text{hom}} = e^{rt}$, där r är ett komplext tal, ger att

$$0 = P\left(\frac{d}{dt}\right) e^{rt} = P(r) \cdot e^{rt} \iff P(r) = 0 \iff r = \begin{cases} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{cases}.$$

Låt oss för enkelhets skull anta att $n = 3!$

Om r_1, r_2 och r_3 är *olika* komplexa tal, så blir

$$u_{\text{hom}} = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + C_3 e^{r_3 t}.$$

Om $r_1 = r_2 \neq r_3$, så blir

$$u_{\text{hom}} = (C_1 + C_2 t) e^{r_1 t} + C_3 e^{r_3 t}.$$

Slutligen, om $r_1 = r_2 = r_3$, så blir

$$u_{\text{hom}} = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2) e^{r_1 t}.$$

SLUTSATS. Den homogena lösningen är alltid ett exponentialpolynom.

Det kan vara svårare att hitta en partikulärlösning till $P(d/dt)u = f(t)$. En metod, som används flitigt inom t.ex. växelströmsteorien, är den så kallade *$i\omega$ -metoden*.

Utgångspunkten är att $P(d/dt)$ är *linjär* i den meningen att om $u(t)$, $v(t)$ är oändligt deriverbara funktioner och a, b är konstanter; så är

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) (a u(t) + b v(t)) = a P\left(\frac{d}{dt}\right) u(t) + b P\left(\frac{d}{dt}\right) v(t).$$

Låt oss för ett ögonblick byta ut den linjära differentialoperatorn $P(d/dt)$ mot en linjär avbildning $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. I den linjära algebran har vi lärt oss att *givet en bas för \mathbb{R}^n* kan vi uttrycka A som en $n \times n$ -*matrix*. En naturlig fråga i detta sammanhang är: kan vi hitta en bas för \mathbb{R}^n som gör framställningen av A maximalt enkel?

Och vi vet sedan tidigare att denna fråga har ett mycket tillfredställande svar *förusatt att A har n linjärt oberoende egenvektorer*, d.v.s. om det finns n linjärt oberoende vektorer $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ så att

$$A \mathbf{b}_k = \lambda_k \mathbf{b}_k \quad \text{för } k = 1, \dots, n.$$

Att de n vektorerna $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ är linjärt oberoende betyder att de bildar en *bas* för \mathbb{R}^n , så att *varje* vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ kan skrivas som en linjärkombination av dessa:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{b}_1 + \dots + x_n \mathbf{b}_n = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{b}_k.$$

Eller lite kortare: $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

Genom att utnyttja A 's linearitet får vi sedan att

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= A \left(\sum_{k=1}^n x_k \mathbf{b}_k \right) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot A\mathbf{b}_k = \sum_{k=1}^n x_k \cdot \lambda_k \mathbf{b}_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \mathbf{b}_k \\ &= (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n). \end{aligned}$$

SLUTSATS. Om vi kan hitta en bas för \mathbb{R}^n bestående av egenvektorer till A , så verkar A på en vektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ genom

$$A(x_1, \dots, x_n) = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n),$$

där $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ är A 's egenvärden. D.v.s: varje komponent av vektorn \mathbf{x} multipliceras med motsvarande egenvärde.

Låt oss nu byta ut A mot d/dt , som är en linjär differentialoperator verkande på det oändligdimensionella vektorrummet $C^\infty(\mathbb{R})$ av oändligt deriverbara funktioner i variabeln t :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}: C^\infty(\mathbb{R}) &\rightarrow C^\infty(\mathbb{R}) \\ u(t) &\mapsto u'(t). \end{aligned}$$

I analogi med överläggningarna ovan skulle vi vilja hitta *en bas för* $C^\infty(\mathbb{R})$ *bestående av egenfunktioner till* d/dt , där $g(t) \neq 0$ sägs vara en sådan egenfunktion om

$$\frac{dg}{dt} = \lambda g(t)$$

för något tal λ (= egenvärdet). Men denna ekvation löses lätt:

$$\begin{aligned} g'(t) = \lambda g(t) &\iff \frac{g'(t)}{g(t)} = \lambda \iff \ln |g(t)| = \lambda t + C \\ &\iff g(t) = \pm e^C \cdot e^{\lambda t} = C_1 \cdot e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

SLUTSATS. Egenfunktionerna till d/dt ges av $e^{\lambda t}$, där λ är ett godtyckligt tal.

I växelströmsteorin är man intresserad av *periodiska funktioner*, d.v.s. funktioner $u(t)$ uppfyllande

$$u(t+T) = u(t) \quad \text{för alla } t,$$

där T är perioden. T.ex. har $\sin t$ och $\cos t$ perioden 2π :

$$\sin(t+2\pi) = \sin t, \quad \cos(t+2\pi) = \cos t.$$

Låt oss därför undersöka vilka egenfunktioner $e^{\lambda t}$ som är T -periodiska:

$$e^{\lambda(t+T)} = e^{\lambda t} \iff e^{\lambda t} \cdot e^{\lambda T} = e^{\lambda t} \iff e^{\lambda T} = 1.$$

Om talet λ antas vara *reellt*, så fås enbart lösningen $\lambda = 0$, d.v.s. den enda reella T -periodiska egenfunktionen till d/dt är den konstanta funktionen 1. Och den kan ju omöjligt bilda någon bas för rummet av T -periodiska funktioner.

Det går bättre om vi accepterar att λ får vara *komplex*:

$$e^{\lambda T} = 1 = e^{i2\pi n} \iff \lambda = i \cdot \frac{2\pi n}{T}, \quad \text{där } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Med

$$\omega_n := \frac{2\pi n}{T}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

fås alltså de T -periodiska egenfunktionerna $\{e^{i\omega_n t}\}$ till d/dt :

$$\frac{d}{dt} e^{i\omega_n t} = i\omega_n \cdot e^{i\omega_n t}.$$

Antag nu att $f(t)$ är en T -periodisk funktion som kan skrivas som en lineärkombination av dessa egenfunktioner:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}.$$

Hur fås koefficienterna c_n i så fall?

Om vi lite lättsinnigt antar att $\int \sum = \sum \int$, så får vi

$$\int_0^T f(t) \cdot e^{-i\omega_m t} dt = \int_0^T \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} \cdot e^{-i\omega_m t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_0^T e^{i(\omega_n - \omega_m)t} dt.$$

Om $n \neq m$ blir

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{i(\omega_n - \omega_m)t} dt &= \int_0^T e^{i \frac{2\pi}{T}(n-m)t} dt = \frac{T}{2\pi i(n-m)} \left[e^{i \frac{2\pi}{T}(n-m)t} \right]_0^T \\ &= \frac{T}{2\pi i(n-m)} (e^{i2\pi(n-m)} - 1) = 0, \end{aligned}$$

eftersom $e^{i2\pi \cdot \text{heltal}} = 1$.

Då $n = m$ fås istället

$$\int_0^T e^{i(\omega_n - \omega_n)t} dt = \int_0^T e^0 dt = \int_0^T 1 dt = T,$$

så att den oändliga summan av integraler ovan reduceras till *en enda* från noll skild term:

$$\int_0^T f(t) e^{-i\omega_m t} dt = c_m \cdot T.$$

SLUTSATS. Om $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}$, så måste

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_n t} dt.$$

OBS: Eftersom $f(t)$ och $e^{-i\omega_n t}$ är T -periodiska, så kan integrationsintervallet bytas mot ett godtyckligt intervall $(c, c + T)$ av längden T .

Givet en T -periodisk integrerbar funktion $f(t)$ kan vi naturligtvis beräkna dessa koefficienter c_n . Och då leds vi automatiskt till följande problem:

1. Är $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}$ konvergent?
2. I så fall, konvergerar serien verkligen mot $f(t)$?

Dessa visar sig vara *utomordentligt besvärliga*, och svaren beror i hög grad på vilket konvergensbegrepp man använder. Men låt oss här bara slapphänt annonsera följande resultat.

FOURIERS SATS. Varje någorlunda snäll T -periodisk funktion $f(t)$ kan skrivas som en så kallad *Fourierserie*:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} \quad \text{med} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_n t} dt.$$

Detta betyder att egenfunktionerna $\{e^{i\omega_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ till d/dt bildar en bas för vektorrummet av alla "någorlunda snälla" T -periodiska funktioner, och uttryckt i denna bas kan en T -periodisk funktion $f(t)$ skrivas i komponentform som

$$f(t) = (\dots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \dots).$$

Accepterar vi att $d/dt \sum = \sum d/dt$, så får vi

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n i\omega_n \cdot e^{i\omega_n t},$$

så att på komponentnivå fungerar d/dt som

$$c_n \mapsto i\omega_n \cdot c_n.$$

SLUTSATS. I basen $\{e^{i\omega_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ övergår derivationsoperatoren d/dt i den mycket enklare operatoren *multiplikation med $i\omega_n$* .

Låt oss nu generalisera detta något genom att ersätta d/dt med en godtycklig linjär differentialoperator med konstanta koefficienter:

$$\frac{d}{dt} \quad \text{byts mot} \quad P\left(\frac{d}{dt}\right) = a_n \frac{d^n}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0.$$

Eftersom

$$\frac{d^k}{dt^k} (e^{\lambda t}) = \lambda^k \cdot e^{\lambda t}$$

ser vi att

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) e^{\lambda t} = P(\lambda) e^{\lambda t}.$$

Så $e^{\lambda t}$ är inte bara egen funktion till d/dt , utan också till *varje* differentialoperator $P(d/dt)$.

Tillämpas detta på en T -periodisk funktion $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}$ får vi

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n P\left(\frac{d}{dt}\right) e^{i\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot P(i\omega_n) e^{i\omega_n t},$$

vilket betyder att den besvärliga differentialoperatoren $P(d/dt)$ på komponentnivå verkar som *multiplikation med* $P(i\omega_n)$:

$$c_n \mapsto P(i\omega_n) \cdot c_n.$$

Låt oss nu använda denna apparat för att finna en partikulärlösning till differentialekvationen

$$P(d/dt)u = f(t),$$

där $f(t)$ är en given någorlunda snäll T -periodisk funktion.

Idén är att först skriva $f(t)$ som en Fourierserie:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}, \quad \text{där} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_n t} dt \quad \text{är kända tal.}$$

Sedan *ansätter* man $u(t)$ som en liknande Fourierserie:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{i\omega_n t}, \quad \text{där} \quad d_n \quad \text{är obestämda koefficienter.}$$

Insättning i differentialekvationen ger

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \cdot P(i\omega_n) e^{i\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i\omega_n t}.$$

Eftersom funktionerna $e^{i\omega_n t}$ är lineärt oberoende, är detta ekvivalent med att

$$d_n \cdot P(i\omega_n) = c_n \quad \text{för} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Om $P(i\omega_n) \neq 0$ för alla n , så kan vi lösa ut de obestämda koefficienterna d_n :

$$d_n = \frac{c_n}{P(i\omega_n)} \quad \text{för} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

och därmed har vi fått vår sökta lösning $u(t)$. Men om det skulle slumpa sig så att $P(i\omega_n) = 0$ för ett visst m , så får vi problem. Har vi tur så är också $c_m = 0$ för samma m , så att villkoret på d_m blir

$$d_m \cdot 0 = 0, \quad \text{vilket visar att } d_m = \text{godtycklig.}$$

Är $c_m \neq 0$ fås istället

$$d_m \cdot 0 = c_m \neq 0,$$

vilket är en flagrant motsägelse – d.v.s. vår ansats fungerar inte. För att få en fungerande ansats byter man i detta fall termen $d_m e^{i\omega_n t}$ i ansatsen mot $d_m \cdot (\text{lämplig potens av } t) \cdot e^{i\omega_n t}$.

Låt oss härnäst se vad som händer om vi slopar kravet på att egenfunktionen $e^{\lambda t}$ till d/dt ska vara T -periodisk, och bara antar att den är *begränsad för alla t* . Om vi accepterar att λ är komplex – säg att $\lambda = \sigma + i\omega$ – så får vi

$$|e^{\lambda t}| = |e^{(\sigma+i\omega)t}| = e^{\sigma t} \cdot |e^{i\omega t}| = e^{\sigma t} < \infty \quad \text{för alla } t.$$

Då $t \rightarrow \infty$ visar detta att $\sigma \leq 0$; då $t \rightarrow -\infty$ fås istället att $\sigma \geq 0$, så att σ måste vara lika med 0:

$$|e^{\lambda t}| < \infty \text{ för alla } t \iff \operatorname{Re} \lambda = 0 \iff \lambda \text{ är rent imaginär: } \lambda = i\omega.$$

Så de relevanta egenfunktionerna i detta fall ges av $\{e^{i\omega t}\}$, där ω nu genomlöper *alla reella tal*, och inte bara heltalen som i det periodiska fallet.

Frågan är nu om vi kan uttrycka en någorlunda godtycklig begränsad funktion $f(t)$ med hjälp av dessa egenfunktioner. Ett sätt att göra detta är att till $f(t)$ associera den T -periodiska funktion $f_T(t)$ som är lika med $f(t)$ på intervallet $(-T/2, T/2)$, och T -periodisk för övrigt. Eftersom då

$$f(t) = f_T(t) \quad \text{när} \quad -T/2 < t < T/2,$$

kan vi uppfatta $f(t)$ som följande gränsvärde:

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t).$$

Genom att Fouriersseriutveckla $f_T(t)$ visar detta att

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_n t} dt \right) e^{i\omega_n t},$$

där alltså $\omega_n = 2\pi n/T$. Med $\Delta\omega_n := \omega_n - \omega_{n-1}$ fås

$$\Delta\omega_n = \frac{2\pi}{T} \quad \text{eller} \quad \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \Delta\omega_n.$$

Därmed blir

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega_n \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_n t} dt \right) e^{i\omega_n t} \Delta\omega_n.$$

Här kan $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\dots) \Delta\omega_n$ uppfattas som en Riemannsumma, och då $\Delta\omega_n \rightarrow 0$ övergår denna i en Riemannintegral:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} \left(\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega t} d\omega.$$

Den inre integralen här är en funktion av ω som kallas för *Fouriertransformen* av $f(t)$ och betecknas med $\mathcal{F}(f)$ eller $\hat{f}(\omega)$.

DEFINITION. Antag att $f(t)$ är *absolutintegrabel*, d.v.s. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$. Då definieras Fouriertransformen av $f(t)$ genom

$$\mathcal{F}(f) \equiv \hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Vi kan därmed formulera resultatet ovan på följande sätt.

FOURIERS SATS. Om $f(t)$ är en någorlunda snäll absolutintegrabel funktion, så kan $f(t)$ uttryckas som en generaliserad lineärkombination av exponentialfunktionerna $e^{i\omega t}$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Detta är motsvarigheten till Fouriers sats för T -periodiska funktioner: koefficienterna c_n , definierade för *alla heltal* n , har ersatts av Fouriertransformen $\hat{f}(\omega)$, definierad för *alla reella tal* ω , och summan har övergått i en integral.

Fouriers sats betyder att vi kan få tillbaka $f(t)$ från $\hat{f}(\omega)$, så att vi har en *invers Fouriertransform* \mathcal{F}^{-1} :

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega = f(t).$$

Genom att derivera under integraltecknet ser vi att

$$P(d/dt)f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \cdot P(i\omega)e^{i\omega t} d\omega,$$

vilket betyder att Fouriertransformen av $P(d/dt)f(t)$ ges av $P(i\omega) \cdot \hat{f}(\omega)$.

Låt oss nu använda detta för att hitta en lösning till differentialekvationen

$$P(d/dt)u = f(t).$$

Fouriertransformering ger

$$P(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega) = \hat{f}(\omega),$$

där alltså alla derivator har trollats bort. Och vi ser att Fouriertransformen av den sökta lösningen ges av

$$\hat{u}(\omega) = \frac{1}{P(i\omega)} \cdot \hat{f}(\omega).$$

Detta leder oss osökt till följande problem: om $\hat{f}(\omega)$ och $\hat{g}(\omega)$ är två Fouriertransformer, vilken funktion är då produkten $\hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega)$ Fouriertransformen av?

SVAR: $\hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega) =$ Fouriertransformen av $f \star g(t)$, där *faltningen* $f \star g$ definieras av

$$f \star g(t) := \int_{u=-\infty}^{\infty} f(t-u)g(u) du.$$

Detta är inte speciellt djupt, men låt oss förbigå beviset här.

En funktion $K(t)$ med egenskapen att $\hat{K}(\omega) = 1/P(i\omega)$ (d.v.s. $K(t) = \mathcal{F}^{-1}(1/P(i\omega))$) sägs vara en *fundamentallösning* till differentialekvationen

$$P(d/dt)u = f(t).$$

$K(t)$ beror uppenbarligen bara på differentialoperatoren $P(d/dt)$, och inte på högerledet $f(t)$.

Med $\hat{K}(\omega) = 1/P(i\omega)$ blir således

$$\hat{u}(\omega) = \hat{K}(\omega) \cdot \hat{f}(\omega) = \text{Fouriertransformen av faltningen } K \star f(t),$$

vilket ger oss lösningen

$$u(t) = K \star f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t-u)f(u) du.$$

POÄNGEN med $i\omega$ -metoden är alltså att vi kan byta differentialoperatören $P(d/dt)$ mot *multiplikation med* $P(i\omega)$:

$$\{P(d/dt)u(t) = f(t)\} \xrightarrow{\mathcal{F}} \{P(i\omega) \cdot \hat{u}(\omega) = \hat{f}(\omega)\}.$$

Sedan löser vi ut Fouriertransformen $\hat{u}(\omega)$ av den sökta lösningen genom att helt enkelt dividera med $P(i\omega)$ (medan vi *naturligtvis* inte kan dividera med $P(d/dt)$):

$$\hat{u}(\omega) = \hat{f}(\omega)/P(i\omega),$$

och får till slut lösningen $u(t)$ genom inverstransformering:

$$u(t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}(\omega)).$$

Och allt detta beror ytterst på att $e^{\lambda t}$ är en egenfunktion till $P(d/dt)$...

9. Laplaces ekvation och konforma avbildningar

I avsnitt 5 såg vi att en analytisk funktions real- och imaginärdelar automatiskt är *harmoniska*, d.v.s. satisfierar Laplaces ekvation. Det visar sig att denna ekvation spelar en stor roll inom olika tillämpningsområden – t.ex. i samband med potential- och strömningsproblem – så låt oss här studera den lite närmare.

PÅMINNELSE. *Laplaces ekvation* för en reell 2-variabelsfunktion $g(x, y)$ ges av

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$$

Denna ekvation har en förskräcklig massa lösningar, så för att få en *unik lösning* måste man kräva att ytterligare villkor är uppfyllda. T.ex.:

Dirichletproblemet: Låt \mathcal{D} vara en öppen sammanhängande mängd i xy -planet med randkurvan $\partial\mathcal{D}$. Bestäm en reell funktion $g(x, y)$ som satisfierar Laplaces ekvation i \mathcal{D} och är lika med en given styckvist kontinuerlig funktion på $\partial\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= 0 \text{ i } \mathcal{D}, \\ g|_{\partial\mathcal{D}} &= \text{en given funktion.} \end{aligned}$$

Neumannproblemet: Antag att \mathcal{D} är en öppen sammanhängande mängd som dessutom är enkelt sammanhängande (d.v.s. "saknar hål"). Låt \hat{n} vara den utåtriktade normalen till randkurvan $\partial\mathcal{D}$. Bestäm en funktion $g(x, y)$ så att

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= 0 \text{ i } \mathcal{D}, \\ \frac{\partial g}{\partial \hat{n}}|_{\partial\mathcal{D}} &= \text{en given funktion.} \end{aligned}$$

Observera att i det senare fallet kan inte den givna randvärdesfunktionen väljas hur som helst, eftersom

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial g}{\partial \hat{n}} \, d\mathbf{r} = \oint_{\partial\mathcal{D}} \text{grad } g \cdot \hat{n} \, d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{D}} \text{div grad } g \, dx dy = \iint_{\mathcal{D}} \Delta g \, dx dy = 0,$$

där vi har använt att $\text{div grad} = \Delta$.

Man kan visa att harmoniska funktioner alltid antar sina största och minsta värden på randen, och härav följer att *Dirichletproblemet har en unik lösning* – och det återstår för oss att bestämma denna.

Om \mathcal{D} är ett komplicerat område är det naturligt att först försöka hitta en variabeltransformation

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases}$$

som avbildar \mathcal{D} på ett *enklare* område i uv -planet – säg enhetsskivan $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$ eller övre halvplanet $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v > 0\}$. Men då måste man också kontrollera hur Laplaceoperatorn $\Delta_{xy} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ transformeras under detta variabelbyte.

Låt g vara en funktion av u och v : $g = g(u, v)$. Via variabeltransformationen ovan kan g även uppfattas som en funktion av x och y : $g = g(u(x, y), v(x, y))$. Kedjeregeln visar att

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

och vi får ett analogt uttryck för $\partial^2 g/\partial y^2$. Tillsammans fås därmed att

$$\begin{aligned} \Delta_{xy} g &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \cdot \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right) \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \cdot \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right) \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \Delta_{xy} u + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \Delta_{xy} v, \end{aligned}$$

som ser *väldigt* oaptitligt ut. Emellertid förenklas detta uttryck drastiskt om u och v satisfierar CR ekvationerna

$$\partial u/\partial x = \partial v/\partial y \quad \text{och} \quad \partial u/\partial y = -\partial v/\partial x,$$

för då blir

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \Delta_{xy}u &= \Delta_{xy}v = 0 \quad (\text{som visats i avsnitt 5}), \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,\end{aligned}$$

och vi ser att

$$\Delta_{xy}g = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right) = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) \cdot \Delta_{uv}g.$$

Eftersom u och v satisfierar CR ekvationerna är

$$u(x, y) + iv(x, y) = \text{en } \textit{analytisk} \text{ funktion } f(z).$$

Vidare är

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial}{\partial x}(u + iv) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y},$$

så att

$$|f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Härav får vi till slut att

$$\Delta_{xy}g = |f'(z)|^2 \cdot \Delta_{uv}g.$$

Om speciellt $f'(z) \neq 0$ i \mathcal{D} , så följer det att

$$\Delta_{xy}g = 0 \text{ i } \mathcal{D} \iff \Delta_{uv}g = 0 \text{ i bildområdet } f(\mathcal{D}).$$

I avsnitt 5 sade vi att en analytisk funktion $f(z)$ är *konform* (= vinkelbevarande) om $f'(z) \neq 0$.

SLUTSATS. Laplaces ekvation bevaras under konforma avbildningar.

Idén är nu att vi med hjälp av en konform avbildning skall avbilda det givna området \mathcal{D} i xy -planet på ett *enkelt standardområde* \mathcal{D}^* i uv -planet. P.g.a. konformiteten kan vi då vara säkra på att Laplaces ekvation i xy -variablerna övergår i Laplaces ekvation i uv -variablerna, och vice versa. Om

vi kan lösa det transformerade problemet i \mathcal{D}^* , så får vi sedan en lösning till ursprungsproblemet genom att byta u och v mot $u(x, y)$ respektive $v(x, y)$.

Om t.ex. $\mathcal{D}^* =$ enhetsskivan, så får vi följande Dirichletproblem:

Bestäm $g(re^{i\theta})$ då $0 \leq r \leq 1$ och $0 \leq \theta \leq 2\pi$ så att

$$\begin{cases} \Delta g = 0 \text{ då } r < 1 \text{ och } \theta \text{ är godtycklig,} \\ g(e^{i\theta}) = \text{given funktion av } \theta \text{ då } 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Man kan visa att lösningen ges av något som kallas för *Poissons integralformel*:

$$g(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\phi)} g(e^{i\phi}) d\phi.$$

Om istället $\mathcal{D}^* =$ övre halvplanet, så får vi Dirichletproblemet

$$\begin{cases} \Delta_{uv} g = 0 \text{ då } v > 0 \text{ och } -\infty < u < \infty, \\ g(u, 0) = \text{given funktion då } -\infty < u < \infty. \end{cases}$$

Även i detta fall finns en Poissons integralformel, nämligen

$$g(u, v) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v}{(u-t)^2 + v^2} g(t, 0) dt.$$

Om vi antar att \mathcal{D} är öppen, sammanhängande, enkelt sammanhängande och dessutom inte är lika med *hela* planet, så säger *Riemanns avbildningssats* att det faktiskt finns en konform avbildning av \mathcal{D} på enhetsskivan (eller övre halvplanet, om man föredrar detta). Ifall dessutom \mathcal{D} :s randkurva är någorlunda väluppfostrad, så fortsätts avbildningen på ett snällt sätt ut på randen också.

Tillsammans säger alltså Riemanns och Poissons satser att

om \mathcal{D} är en öppen, sammanhängande och enkelt sammanhängande äkta delmängd av det komplexa planet, så kan Dirichletproblemet i \mathcal{D} lösas genom att kombinera Riemanns avbildningssats med Poissons integralformel.

Nu är både Riemanns och Poissons satser alldeles för avancerade för vår kurs, men slutsatsen ovan antyder ändå att konform avbildning är ett kraftfullt verktyg för att lösa Dirichletproblem.

Idén i det följande är att vi ska lära känna några enkla konforma avbildningar – som t.ex.

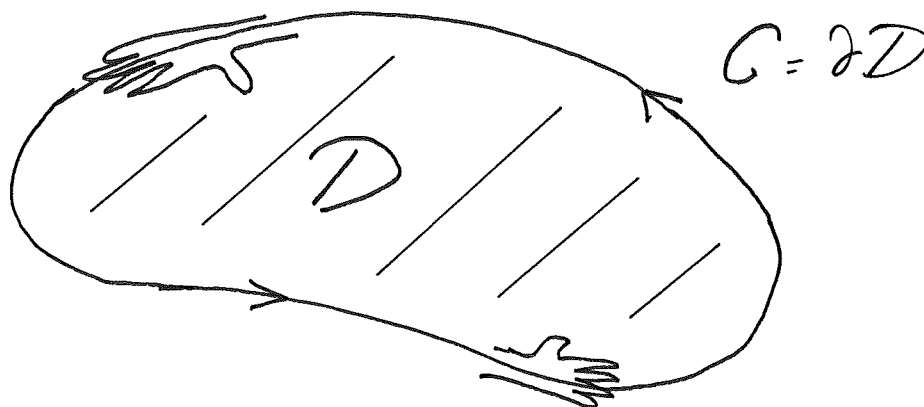
- Möbiusfunktionen $w = \frac{az+b}{cz+d}$,
- e^z och dess invers $\log z$,
- $\sin z$ och $\cos z$,
- potensfunktionen $w = z^a$ (där $a \in \mathbb{R}$),
- Joukowskifunktionen $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$,

– och inse att man med hjälp av dessa och deras sammansättningar kan avbilda ganska komplicerade områden på enkla standardområden. Om sedan Dirichletproblemet har tillräckligt snälla randvillkor, så kommer vi att se att man ofta nog kan gissa sig till den sökta lösningen utan att behöva räkna just någonting.

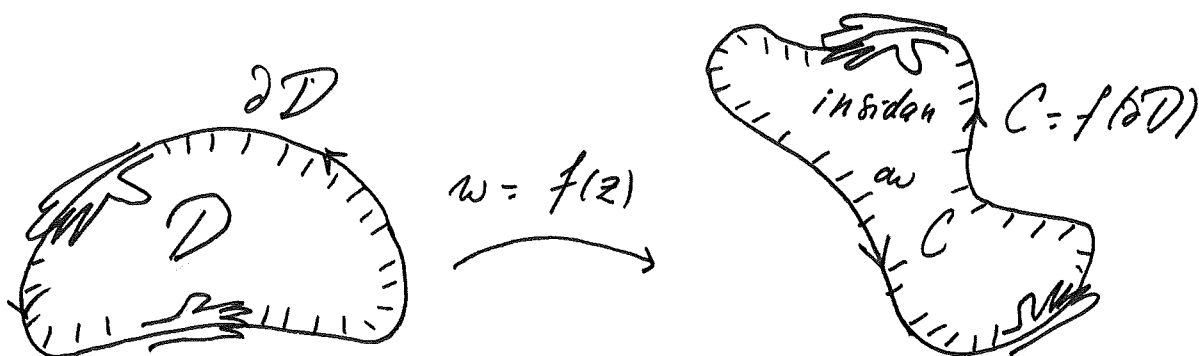
Men låt oss först observera att en konform avbildning är *bestämd av sina randvärden*.

DEFINITION. Låt \mathcal{D} vara en öppen, sammanhängande och enkelt sammanhängande mängd med randkurvan $\partial\mathcal{D}$. $\partial\mathcal{D}$ sägs vara *positivt orienterad* med avseende på \mathcal{D} om $\partial\mathcal{D}$:s riktning är sådan att högerhandens tumme pekar in mot \mathcal{D} när fingrarna har samma riktning som $\partial\mathcal{D}$.

Allmänt gäller följande resultat (som kallas Jordans kurvsats och faktiskt är ganska djup): Om \mathcal{C} är enkel sluten kurva i planet, så delar \mathcal{C} planet i två delar: *insidan* av \mathcal{C} (som är ett ändligt område), och *utsidan* (som är ett oändligt område). \mathcal{C} sägs vara *positivt orienterad* om den är så med avseende på sin insida.



Låt oss betrakta följande situation: \mathcal{D} är ett *begränsat* öppet, sammanhängande och enkelt sammanhängande område, $f(z)$ är konform i \mathcal{D} och på randkurvan $\partial\mathcal{D}$ (varvid det senare betyder att $f(z)$ är konform i någon öppen omgivning av $\partial\mathcal{D}$), samt *begränsad* på $\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$. Antag vidare att $w = f(z)$ avbildar $\partial\mathcal{D}$ enentydigt på en enkel sluten kurva $\mathcal{C} = f(\partial\mathcal{D})$ i w -planet, så att bildkurvan \mathcal{C} genomlöps i positiv led när $\partial\mathcal{D}$ genomlöps i positiv led:



Om högerhanden läggs på $\partial\mathcal{D}$ så att fingrarna pekar i $\partial\mathcal{D}$:s riktning, så kommer tummen att *peka in* i \mathcal{D} . Då $w = f(z)$ avbildar $\partial\mathcal{D}$ på \mathcal{C} induceras en riktning för \mathcal{C} , som enligt antagande ger \mathcal{C} en positiv orientering. Lagg sedan högerhanden längs \mathcal{C} i denna riktning. Konformiteten medför att vinkeln mellan tummen och fingrarna bevaras, och detta i sin tur visar att *tummen kommer att peka in i \mathcal{C} :s insida*.

Detta innebär att punkter i \mathcal{D} som ligger nära $\partial\mathcal{D}$ kommer att avbildas på punkter i \mathcal{C} :s *insida* nära \mathcal{C} .

Mera allmänt kan man med hjälp av den så kallade *argumentprincipen* visa följande resultat.

SATS. *Under de förutsättningar som angetts ovan gäller:*

f avbildar $\partial\mathcal{D}$ enentydigt på \mathcal{C} med bibehållande av orienteringen
 $\implies f$ avbildar hela \mathcal{D} enentydigt på hela *insidan* av \mathcal{C} .

Poängen med detta är: *För att förstå hur f avbildar \mathcal{D} räcker det att*

förstå hur f avbildar randen $\partial\mathcal{D}$!

Denna sats låter sig sedan generaliseras till fallet då $\partial\mathcal{D}$ och/eller $\mathcal{C} = f(\partial\mathcal{D})$ går genom oändlighetspunkten (= nordpolen på Riemannsfären) – och resultatet blir precis det man förväntar sig.

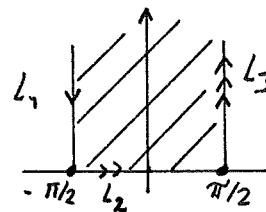
Exempel. Låt \mathcal{D} vara halvbandet $\{z \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2 \text{ och } \operatorname{Im} z > 0\}$, och låt $w = f(z) = \sin z$. Bestäm $f(\mathcal{D})$!

Enligt satsen ovan räcker det att undersöka hur $w = \sin z$ avbildar randstyckena

$$L_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = -\pi/2, \operatorname{Im} z > 0\},$$

$$L_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2, \operatorname{Im} z = 0\},$$

$$L_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = \pi/2, \operatorname{Im} z > 0\}.$$



På L_1 är $z = -\pi/2 + iy$, där y avtar från ∞ till 0, så där är

$$\begin{aligned} w &= \sin(-\pi/2 + iy) = \frac{1}{2i}(e^{-\frac{i\pi}{2}-y} - e^{\frac{i\pi}{2}+y}) = \frac{1}{2i}(-i \cdot e^{-y} - i \cdot e^y) \\ &= -\frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) = -\cosh y. \end{aligned}$$

Då y minskar från ∞ till 0, minskar $\cosh y$ från ∞ till 1, så bildkurvan blir $\{w \in \mathbb{C} \mid -\infty < \operatorname{Re} w < -1, \operatorname{Im} w = 0\}$, d.v.s. den består av negativa reella axeln mellan $-\infty$ och -1 .

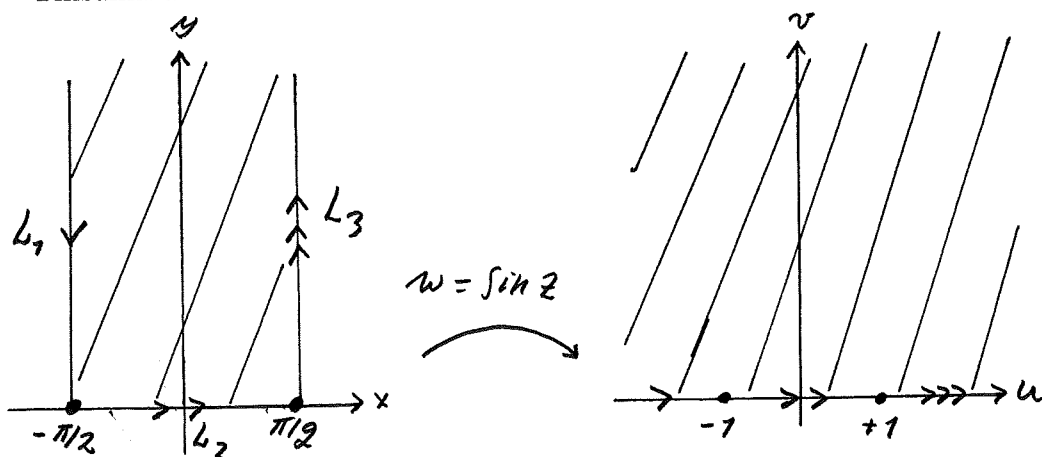
På L_2 är $z = x$, där x växer från $-\pi/2$ till $\pi/2$, så där är $w = \sin x$, som alltså är reell och växer från -1 till 1.

På L_3 är $z = \pi/2 + iy$, där y växer från 0 till ∞ . Därmed är

$$\begin{aligned} w &= \sin(\pi/2 + iy) = \frac{1}{2i}(e^{i\pi/2-y} - e^{-i\pi/2+y}) = \frac{1}{2i}(ie^{-y} + ie^y) \\ &= \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) = \cosh y. \end{aligned}$$

När y växer från 0 till ∞ , växer $\cosh y$ från 1 till ∞ , så att bildkurvan blir $\{w \in \mathbb{C} \mid 1 < \operatorname{Re} w < \infty, \operatorname{Im} w = 0\} =$ positiva reella axeln mellan 1 och ∞ .

Tillsammans fås alltså:



Om högerhandens fingrar följer pilarnas riktning så pekar tummen in mot övre halvplanet $\{w \in \mathbb{C} \mid \text{Im } w > 0\}$, som alltså blir bildområdet. Observera att de räta vinklarna vid $(\pm\pi/2, 0)$ fördubblas, så att $\sin z$ inte är konform där. Vilket beror på att derivatan $= \cos z$ är $= 0$ då $z = \pm\pi/2$.

Låt oss härnäst se hur vi kan använda detta resultat för att lösa ett Dirichletproblem på \mathcal{D} med styckvist konstanta randvärden.

Exempel. Lös Dirichletproblemet

$$\begin{cases} \Delta g = 0 \text{ då } -\pi/2 < x < \pi/2 \text{ och } y > 0; \\ g(-\pi/2, y) = 1 \text{ då } y > 0, \quad g(x, 0) = 5 \text{ då } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \text{och } g(\pi/2, y) = -3 \text{ då } y > 0. \end{cases}$$

Enligt ovan sätter vi

$$\begin{aligned} w = u + iv = \sin z &= \frac{1}{2i}(e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}) = \frac{1}{2i}(e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^y) = \\ &= \frac{1}{2i}((\cos x + i \sin x)e^{-y} - (\cos x - i \sin x)e^y) \\ &= \sin x \cdot \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) + i \cos x \cdot \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \\ &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, \end{aligned}$$

d.v.s.

$$\begin{cases} u = \sin x \cosh y, \\ v = \cos x \sinh y, \end{cases}$$

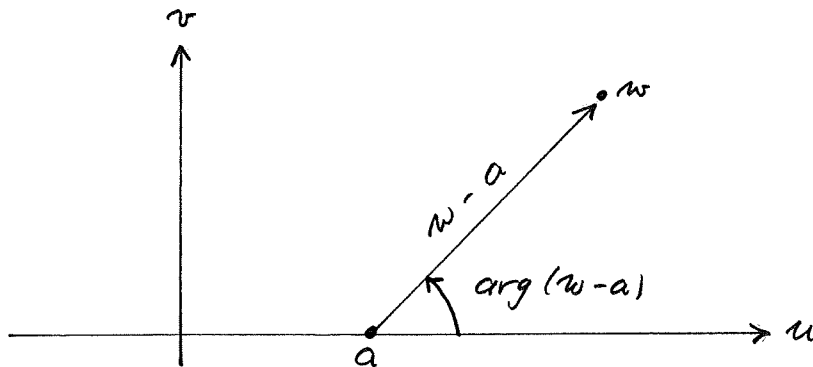
och får därigenom följande Dirichletproblem i uv -planet:

$$\begin{cases} \Delta g = 0 \text{ då } -\infty < u < \infty \text{ och } v > 0, \\ g(u, 0) = 1 \text{ då } -\infty < u < -1, \quad g(u, 0) = 5 \text{ då } -1 < u < 1 \\ \text{och } g(u, 0) = -3 \text{ då } 1 < u < \infty. \end{cases}$$

Fixera en punkt a på u -axeln. Eftersom

$$\log(w - a) = \ln |w - a| + i \arg(w - a)$$

är analytisk då $w \neq a$, så är $\ln |w - a|$ och $\arg(w - a)$ harmoniska där, d.v.s. satisfierar Laplaces ekvation utom i punkten a . Då vi bara är intresserade av övre halvplanet kan vi göra $\arg(w - a)$ entydig genom att slå fast att $0 \leq \arg(w - a) \leq \pi$ där:



Härav följer att

$$\Delta \arg(w - a) = 0 \text{ då } \operatorname{Im} w > 0 \text{ och } \arg(u - a) = \begin{cases} 0 \text{ då } u > a, \\ \pi \text{ då } u < a. \end{cases}$$

Om vi sätter

$$\phi_{(a)}(u, v) := 1 - \frac{1}{\pi} \arg(u + iv - a),$$

så får vi istället

$$\Delta\phi_{(a)}(u, v) = 0 \text{ då } v > 0 \text{ och } \phi_{(a)}(u, 0) = \begin{cases} 1 \text{ då } u > a, \\ 0 \text{ då } u < a. \end{cases}$$

Genom att kombinera sådana funktioner kan vi till slut konstruera lösningen till vårt Dirichletproblem i uv -planet:

$$g(u, v) = 1 + 4\phi_{(-1)}(u, v) - 8\phi_{(1)}(u, v)$$

– ELLER HUR? Och genom att byta u mot $\sin x \cosh y$ och v mot $\cos x \sinh y$ får vi till slut lösningen till ursprungsproblemet.

10. Möbiusfunktionen

I avsnitt 4 stötte vi på Möbiusfunktionen $m(z)$, som lämpligast bör uppfattas som en avbildning av Riemannsfären på sig själv:

$$\begin{aligned} m: \widehat{\mathbb{C}} &\rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{om } z \neq -d/c \text{ och } z \neq \infty, \\ -d/c &\mapsto \infty \\ \infty &\mapsto a/c. \end{aligned}$$

Här är a, b, c, d komplexa tal som är godtyckliga bortsett från att $ad - bc \neq 0$ – vilket innebär att $m(z)$ är icke-konstant.

Då $z \neq -d/c, z \neq \infty$ blir derivatan

$$\frac{dm}{dz} = \frac{(cz + d)a - (az + b)c}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0,$$

vilket betyder att Möbiusfunktionen är *konform* där. Genom att införa en lämplig lokal koordinat i ∞ (nämligen $\zeta = 1/z$) så ser man att Möbiusfunktionen faktiskt är konform på *hela* Riemannsfären.

I avsnitt 3 såg vi att räta linjer kan uppfattas som ”cirklar genom oändlighetspunkten”. Det kan därför vara bekvämt att bunta ihop cirklar och räta linjer till ett enda begrepp:

DEFINITION. Med en ”*cirkel*” menas antingen en vanlig cirkel eller en rät linje.

Vi såg också i avsnitt 3 hur man definierar *spegelpunkter med avseende på en ”cirkel*”. För en rät linje är definitionen den uppenbara. För en cirkel med medelpunkt i \mathcal{O} och radien R säger man att P_1 och P_2 är spegelpunkter om

1. P_1 och P_2 ligger på samma förlängda radie från medelpunkten \mathcal{O} , och
2. $|\overrightarrow{OP_1}| \cdot |\overrightarrow{OP_2}| = R^2$.

Om $P_2 \rightarrow \infty$ ser vi att P_1 måste gå mot \mathcal{O} för att vänsterledet i 2. ska förbli ändligt. Så

medelpunkten och ∞ är varandras spegelpunkter.

Omvänt, om en cirkel \mathcal{C} har P_1 och $P_2 = \infty$ som spegelpunkter, så *måste* \mathcal{C} ha sin medelpunkt \mathcal{O} i P_1 – igen för att vänsterledet i 2. ska ha en chans att vara ändligt. Däremot kan man inte dra någon slutsats om \mathcal{C} :s radie.

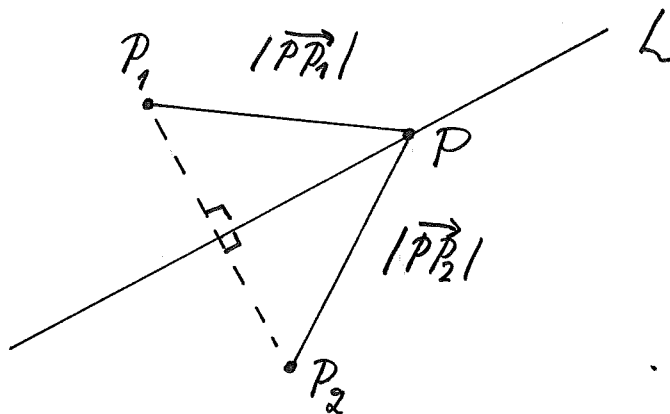
I detta avsnitt ska vi visa följande mycket användbara resultat:

Möbiusfunktioner avbildar "cirklar" på "cirklar", varvid spegelpunkter avbildas på spegelpunkter.

Till att börja med ska vi ange ekvationen för en "cirkel" med hjälp av ett spegelpunktspar.

För räta linjer är detta väldigt rättframt. Ty låt L vara en rät linje, och låt P_1, P_2 vara spegelpunkter med avseende på L ; då är L lika med mittpunktsnormalen till linjestycket P_1P_2 :

$$L = \{P \mid |\overrightarrow{PP_1}| = |\overrightarrow{PP_2}|\}.$$



Omvänt, om vi startar med två godtyckliga punkter P_1 och P_2 , så kan vi till dessa associera en entydigt bestämd linje, nämligen mittpunktsnormalen till P_1P_2 .

Ekvationen för en rät linje L kan alltså skrivas som

$$\frac{|\overrightarrow{PP_1}|}{|\overrightarrow{PP_2}|} = 1,$$

där (P_1, P_2) är ett godtyckligt par av spegelpunkter med avseende på L .

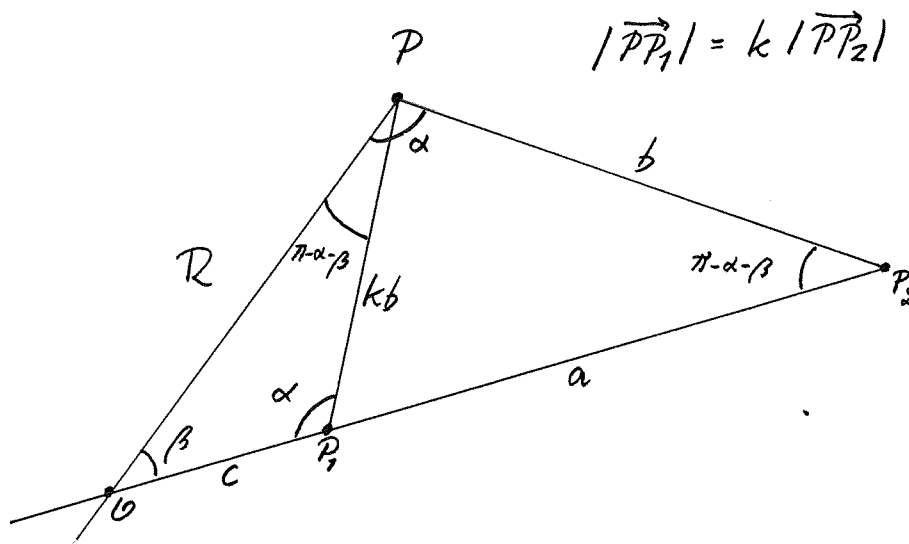
PÅSTÅENDE. Låt P_1 och P_2 vara två givna olika punkter. För $0 < k < \infty$ beskriver ekvationen

$$\frac{|\overrightarrow{PP_1}|}{|\overrightarrow{PP_2}|} = k \quad (*)$$

en 1-parametrig skara av "cirklar" med P_1 och P_2 som gemensamma spegelpunkter.

För $k = 1$ har vi sett att $(*)$ betyder mittpunktsnormalen till linjestycket P_1P_2 . Så låt oss i fortsättningen anta att $k \neq 1$.

Låt P vara en godtycklig punkt som uppfyller $(*)$, så att $|\overrightarrow{PP_1}| = k|\overrightarrow{PP_2}|$. Om $0 < k < 1$ drar vi ut linjesegmentet P_1P_2 till andra sidan om P_1 ; om $k > 1$ förlänger vi istället P_1P_2 till andra sidan om P_2 . Låt oss betrakta fallet $0 < k < 1$:



Sätt $|\overrightarrow{P_1P_2}| = a$ och $|\overrightarrow{PP_2}| = b$; då blir alltså $|\overrightarrow{PP_1}| = kb$. Låt oss kalla vinkeln mellan $\overrightarrow{P_1P}$ och förlängningen av $\overrightarrow{P_1P_2}$ på andra sidan om P_1 för α . Avsätt sedan denna vinkel vid P , med $\overrightarrow{PP_2}$ som det ena vinkelbenet; det andra vinkelbenet kommer då (på grund av att $k < 1$) att skära förlängningen av $\overrightarrow{P_1P_2}$ i en punkt O . (Om istället k hade varit större än 1, så hade vi dragit ut $\overrightarrow{P_1P_2}$ på andra sidan om P_2 och gjort motsvarande konstruktion där.)

Sätt $|\overrightarrow{OP_1}| = c$, $|\overrightarrow{OP}| = R$, och betrakta sedan trianglarna OP_1P och OP_2P . Vinkeln β vid O är gemensam för dessa, och eftersom båda innehåller

vinkeln α ($\widehat{OP_1P} = \widehat{OPP_2} = \alpha$), så är trianglarna *likformiga*. Vi ser också att den återstående vinkeln blir $\pi - \alpha - \beta$: $\widehat{OP_2P} = \widehat{OPP_1} = \pi - \alpha - \beta$.

Om vi betraktar förhållandena mellan de sidor i OP_1P respektive OP_2P som står emot vinklarna α , β och $\pi - \alpha - \beta$, så ger likformigheten att

$$\frac{R}{a+c} = \frac{kb}{b} = \frac{c}{R},$$

där alltså b kan förkortas bort:

$$\frac{R}{a+c} = \frac{c}{R} = k.$$

Här är k ($0 < k < 1$) och a = avståndet mellan P_1 och P_2 givna. Ur de två ekvationerna ovan kan sedan R , c och därmed också $a+c$ lösas ut:

$$c = kR \implies R = (a+c)k = ak + k^2R \implies R = \frac{ak}{1-k^2}, \quad c = \frac{ak^2}{1-k^2},$$

och

$$a+c = a \left(1 + \frac{k^2}{1-k^2} \right) = \frac{a}{1-k^2}.$$

Vi ser alltså att *varje punkt* P som uppfyller $|\overrightarrow{PP_1}| = k |\overrightarrow{PP_2}|$ ligger på cirkeln \mathcal{C} med radien $R = ak/(1-k^2)$ och medelpunkten \mathcal{O} , där \mathcal{O} är entydigt bestämd av att ligga på avståndet $c = ak^2/(1-k^2)$ från P_1 på räta linjen genom P_1 och P_2 . Och det är inte svårt att övertyga sig om att *alla punkter* P på denna cirkel uppfyller $|\overrightarrow{PP_1}| = k |\overrightarrow{PP_2}|$.

Från $R/(a+c) = c/R$ följer det också att

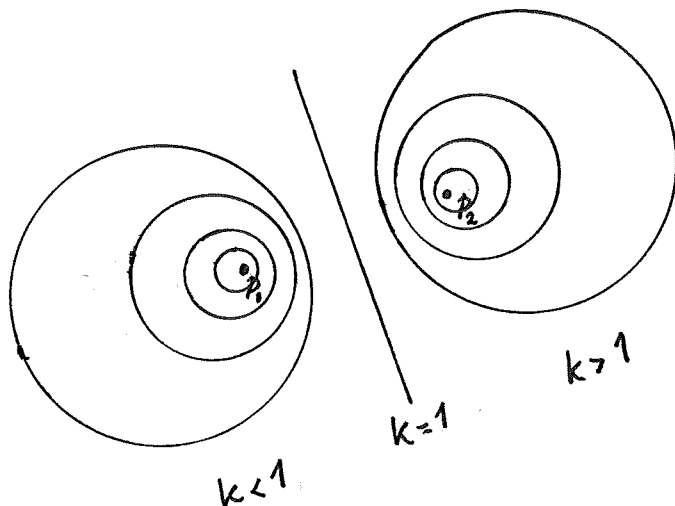
$$|\overrightarrow{OP_1}| \cdot |\overrightarrow{OP_2}| = c(c+a) = R^2,$$

vilket betyder att P_1 och P_2 är *spegelpunkter med avseende på cirkeln* \mathcal{C} .

SLUTSATS. För givna olika punkter P_1 och P_2 utgör mängden av de punkter P som uppfyller $|\overrightarrow{PP_1}| = k |\overrightarrow{PP_2}|$ är en "cirkel", vilken har P_1 och P_2 som spegelpunkter.

Då $0 < k < 1$ ligger P_1 inuti cirkeln medan P_2 ligger utanför, då $k = 1$ är "cirkeln" lika med mittpunktsnormalen till P_1P_2 , och då $k > 1$ ligger P_2 innanför och P_1 utanför cirkeln.

Våra "cirklar" ser ut ungefär så här för olika värden på k :



Dessa kallas för de Apolloniska "cirkarna" hörande till spegelpunktsparet (P_1, P_2) , efter den grekiske matematikern Apollonius från Perga (cirka 262 – 190 f.Kr.), som annars är mest känd för ett berömt arbete om kägelsnittsteori.

Om vi istället startar med en cirkel \mathcal{C} som har sin medelpunkt i \mathcal{O} och radien lika med R , så kan vi välja något spegelpunktspar (P_1, P_2) med P_1 inuti \mathcal{C} . Med tidigare beteckningar är därmed $c = |\overrightarrow{\mathcal{O}P_1}|$ givet, och härur fås

$$k = \frac{c}{R} = \frac{|\overrightarrow{\mathcal{O}P_1}|}{R}$$

Den Apolloniska cirkeln hörande till spegelpunktsparet (P_1, P_2) och detta värde på k kommer då att bli just \mathcal{C} .

Vi ser därmed att varje "cirkel" \mathcal{C} kan skrivas på spegelpunktsformen

$$\mathcal{C} = \{P \mid |\overrightarrow{PP_1}| = k |\overrightarrow{PP_2}|\},$$

där (P_1, P_2) är spegelpunkter med avseende på \mathcal{C} och $0 < k < \infty$.

Identifierar vi vårt plan med det komplexa planet, så får vi följande resultat.

SATS. Varje "cirkel" i komplexa planet kan skrivas på spegelpunktsformen

$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = k,$$

där z_1, z_2 är spegelpunkter och k är en positiv konstant. Om $k = 1$ är "cirkeln" en rät linje, annars en vanlig cirkel.

Omvänt, om $z_1 \neq z_2$ är godtyckliga komplexa tal och k är ett positivt tal, så är den geometriska tolkningen av ovanstående ekvation en "cirkel" med spegelpunkterna z_1 och z_2 .

Vi är nu redo att bevisa huvudsatsen i detta avsnitt.

SATS. Möbiusfunktioner avbildar "cirklar" på "cirklar", varvid spegelpunkter övergår i spegelpunkter. Eller mera precist:

$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = k \text{ och } w = m(z) = \frac{az + b}{cz + d} \implies \left| \frac{w - m(z_1)}{w - m(z_2)} \right| = K$$

för ett visst positivt tal K .

Bevis. Låt oss först beräkna inversen till

$$w = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Genom att multiplicera upp nämnaren fås

$$z \cdot cw + dw = az + b \iff z(cw - a) = -dw + b,$$

det vill säga

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a} \quad \text{— som alltså också är en Möbiusfunktion.}$$

Insatt i

$$k = \left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right|$$

ger detta att

$$\begin{aligned} k &= \left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = \left| \frac{\frac{-dw+b}{cw-a} - z_1}{\frac{-dw+b}{cw-a} - z_2} \right| = \left| \frac{-dw + b - cwz_1 + az_1}{-dw + b - cwz_2 + az_2} \right| \\ &= \left| \frac{(d + cz_1)w - (az_1 + b)}{(d + cz_2)w - (az_2 + b)} \right| = \left| \frac{d + cz_1}{d + cz_2} \right| \cdot \left| \frac{w - \frac{az_1+b}{cz_1+d}}{w - \frac{az_2+b}{cz_2+d}} \right| \\ &= \left| \frac{d + cz_1}{d + cz_2} \right| \cdot \left| \frac{w - m(z_1)}{w - m(z_2)} \right|, \end{aligned}$$

eller

$$\left| \frac{w - m(z_1)}{w - m(z_2)} \right| = k \cdot \left| \frac{d + cz_2}{d + cz_1} \right|.$$

I högerledet har vi nu fått en ny konstant, som vi kallar för K :

$$K := k \cdot \left| \frac{d + cz_2}{d + cz_1} \right|,$$

och ekvationen för bildfiguren blir då

$$\left| \frac{w - m(z_1)}{w - m(z_2)} \right| = K.$$

Vi ser därmed att bildfiguren verkligen blir en "cirkel" med spegelpunkterna $m(z_1)$ och $m(z_2)$. Då $K \neq 1$ fås en vanlig cirkel, medan $K = 1$ ger en rät linje. \square

Antag nu att vi har en Möbiusfunktion $w = (az + b)/(cz + d)$ med $c \neq 0$ (så att funktionen *inte* reduceras till ett förstgradspolynom). Då kan vi skriva

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{z - (-b/a)}{z - (-d/c)}.$$

Så med $\alpha := a/c$, $z_1 := -b/a$ och $z_2 := -d/c$ kan vår funktion alternativt skrivas som

$$w = \alpha \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

Här ser vi att $z = z_1$ avbildas på $w = 0$ och att $z = z_2$ avbildas på $w = \infty$.

Låt oss nu betrakta skaran av Apolloniska "cirklar"

$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = k, \quad \text{där} \quad 0 < k < \infty.$$

Dessa "cirklar" har z_1 och z_2 som spegelpunkter, och enligt satsen ovan avbildas de på "cirklar" i w -planet med 0 och ∞ som spegelpunkter – det vill säga på cirklar med origo som medelpunkt.

Detta ses också omedelbart ur

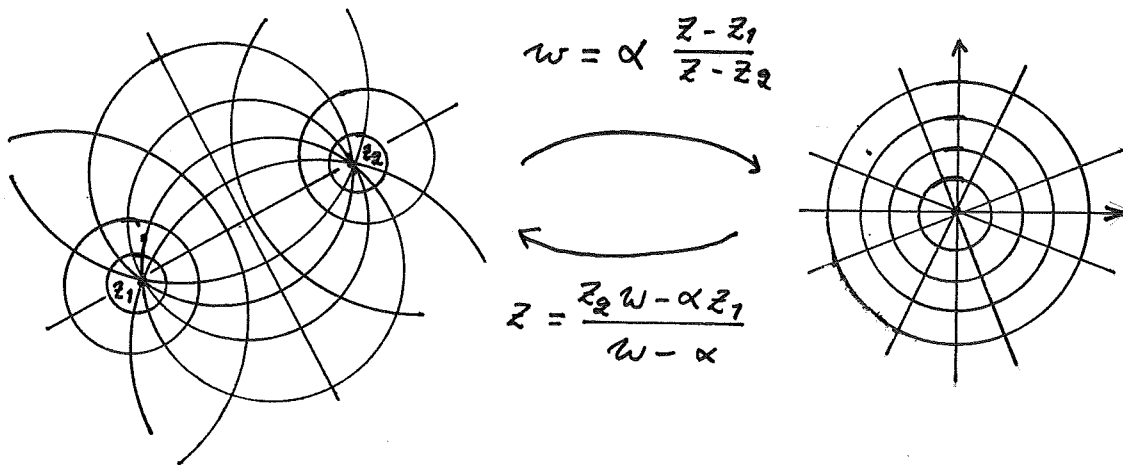
$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = k \iff \left| \frac{w}{\alpha} \right| = k \iff |w| = k |\alpha|.$$

Inversen till $w = \alpha \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}$ ges av $z = \frac{z_2 w - \alpha z_1}{w - \alpha},$

och man ser att $w = 0 \implies z = z_1$ och $w = \infty \implies z = z_2$.

Låt oss i w -planet rita de koncentriska cirkelnarna $|w| = R$ (som alltså motsvarar de Apolloniska $|z - z_1|/|z - z_2| = R/|\alpha|$) och alla räta linjer genom origo; de senare skär naturligtvis cirkelnarna omkring origo ortogonalt.

Eftersom varje sådan rät linje går genom $w = 0$ och $w = \infty$, så avbildas de på cirklar i z -planet som går genom $z = z_1$ och $z = z_2$. Då Möbiusfunktioner är konforma (d.v.s. vinkelbevarande) överallt, så kommer denna cirkelskara i z -planet att skära de Apolloniska cirkelnarna vinkelrätt, så att vi får två ortogonala cirkelskaror i z -planet:

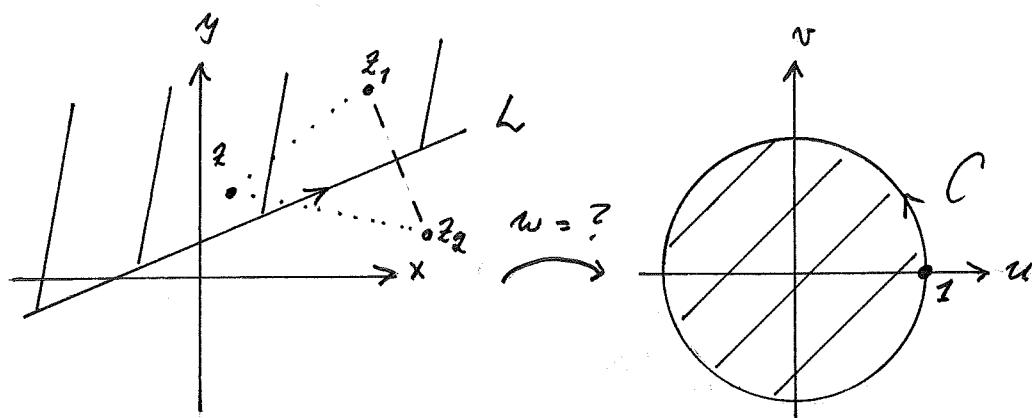


Tjusigt – ELLER HUR?

11. Exempel på konforma avbildningar

Låt oss här titta på några standardavbildningar som det kan vara nyttigt att känna till.

1. Halvplan på enhetsskivan och vice versa.



Halvplanetns rand är en *rät linje* L , som ska avbildas konformt på *enhetsskivan* $C = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1\}$ i w -planet. Det är därför naturligt att prova med en Möbiusfunktion. Låt z_1 och z_2 vara spegelpunkter med avseende på L , där z_1 ligger i det halvplan som ska avbildas på enhetsskivan. Vi kan skicka dessa till spegelpunkterna 0 och ∞ med avseende på C genom att ta $z - z_1$ som täljare och $z - z_2$ som nämnare:

$$w = \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

Eftersom L är en rät linje måste bilden bli en "cirkel"; eftersom denna har 0 och ∞ som spegelpunkter måste det dessutom vara en cirkel med 0 som medelpunkt. I vårt fall är det dessutom uppenbart att

$$z \in L \iff |z - z_1| = |z - z_2| \iff |w| = 1,$$

så L avbildas faktiskt på just C . Vidare är det klart att

$$z \text{ på samma sida om } L \text{ som } z_1 \implies |w| = \left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| < 1,$$

$$z \text{ på samma sida om } L \text{ som } z_2 \implies |w| = \left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| > 1,$$

vilket innebär att halvplanet innehållande z_1 avbildas på insidan av C (d.v.s. enhetsskivan), medan det halvplan som innehåller z_2 avbildas på C 's utsida.

Inversa avbildningen fås genom att lösa ut z :

$$\begin{aligned} w = \frac{z - z_1}{z - z_2} &\iff wz - wz_2 = z - z_1 \iff z(w - 1) = z_2w - z_1 \\ &\iff z = \frac{z_2w - z_1}{w - 1}. \end{aligned}$$

Specialfall: Övre halvplanet på enhetsskivan och tvärsom. Som spegelpunkter till reella axeln kan vi ta $\pm i$, där alltså $+i$ ligger i övre halvplanet. Enligt ovan kommer då

$$w = \frac{z - i}{z + i}$$

att avbilda övre halvplanet på enhetsskivan, medan inversen

$$z = i \frac{1 + w}{1 - w}$$

avbildar enhetsskivan i w -planet på övre halvan av z -planet. Det är alltså enkelt att gå mellan övre halvplanet och enhetsskivan.

Om vi byter z och w mot varandra, så följer det att

$$w = i \frac{1 + z}{1 - z}$$

avbildar enhetsskivan i z -planet på övre halvan av w -planet. Låt oss för skojs skull kontrollera detta genom att sätta in några punkter:

$$z = 1 \implies w = \infty;$$

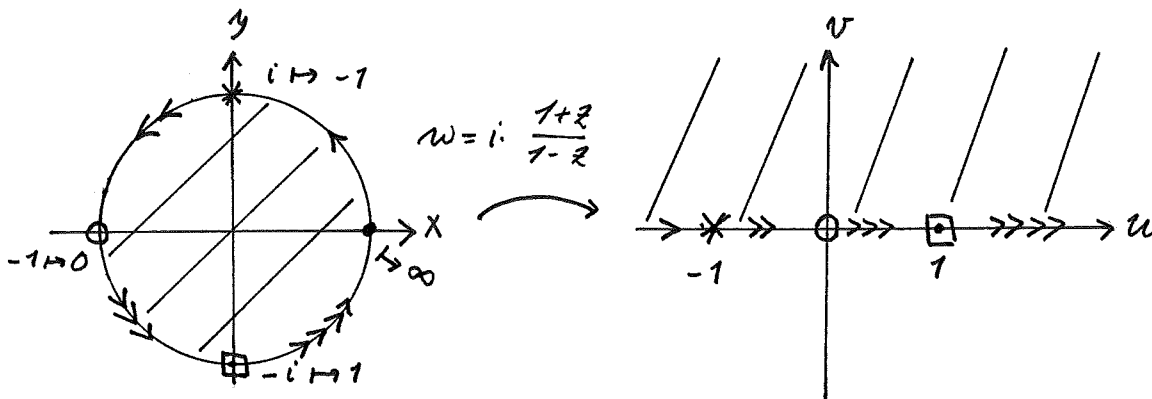
$$z = i \implies w = i \frac{1 + i}{1 - i} = i \frac{1 + i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = i \cdot \frac{2i}{2} = -1;$$

$$z = -1 \implies w = 0;$$

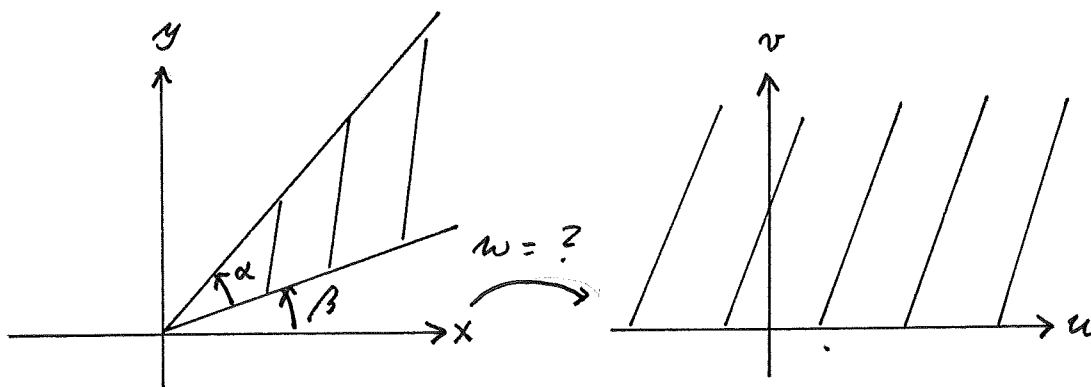
$$z = -i \implies w = i \frac{1 - i}{1 + i} = i \frac{1 - i}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i} = i \cdot \frac{-2i}{2} = 1;$$

$$z = 0 \implies w = i.$$

Bilden blir därför:



2. Vinkelområde på övre halvplanet. Vi vill här avbilda vinkelområdet $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \beta < \arg z < \beta + \alpha\}$ konformt på övre halvan av w -planet:



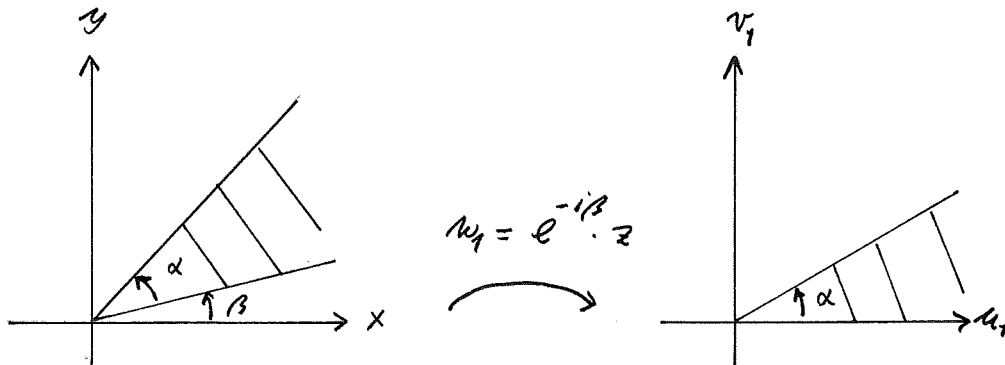
Observera att om $z = r \cdot e^{i\theta}$ multipliceras med $e^{i\phi}$, så fås

$$e^{i\phi} z = r \cdot e^{i(\theta+\phi)},$$

vilket innebär att vektorn z vrids med vinkeln ϕ .

Vi börjar med att vrida vårt vinkelområde så att ena vinkelbenet kommer att sammanfalla med positiva reella axeln – d.v.s. vi vrider med vinkeln $(-\beta)$

genom att sätta $w_1 := e^{-i\beta} z$:



Bildområdet blir då $\mathcal{D}_1 = \{w_1 \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg z < \alpha\}$, och vi vill sedan avbilda detta på övre halvplanet $\{w \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg w < \pi\}$, d.v.s. vi vill förstora vinkelintervallet $(0, \alpha)$ till $(0, \pi)$. Det kan vi göra genom att sätta $w = (w_1)^{\pi/\alpha}$, ty

$$w_1 \in \mathcal{D}_1 \iff w_1 = r \cdot e^{i\theta} \text{ med } 0 \leq r < \infty \text{ och } 0 < \theta < \alpha$$

ger att

$$w = (w_1)^{\pi/\alpha} = r^{\pi/\alpha} \cdot e^{i\frac{\theta\pi}{\alpha}} \text{ med } 0 \leq |w| < \infty \text{ och } 0 < \arg w = \frac{\theta\pi}{\alpha} < \pi,$$

så bildmängden blir faktiskt hela övre halvplanet.

Tillsammans får vi

$$z \mapsto w_1 = e^{-i\beta} \cdot z \mapsto w = (w_1)^{\pi/\alpha} = e^{-i\frac{\beta\pi}{\alpha}} \cdot z^{\pi/\alpha},$$

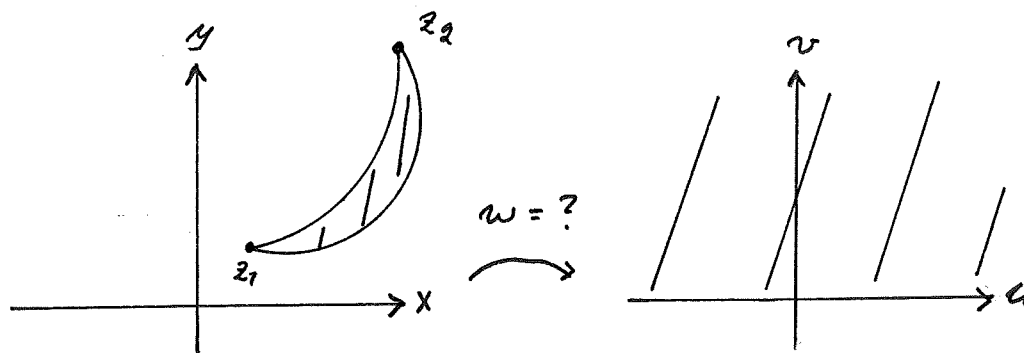
där principalgrenen av $z^{\pi/\alpha}$ avses.

Specialfall: Första kvadranten på övre halvplanet. Här ska vinkeln $\pi/2$ fördubblas till π , vilket görs genom att sätta

$$w = z^2.$$

3. "Cirkel"-tvåhörning på övre halvplanet. En "cirkel"-tvåhörning är en tvåhörning som begränsas av två "cirkel"-bågar – vinkelområdet ovan är ett exempel med hörnpunkterna 0 och ∞ .

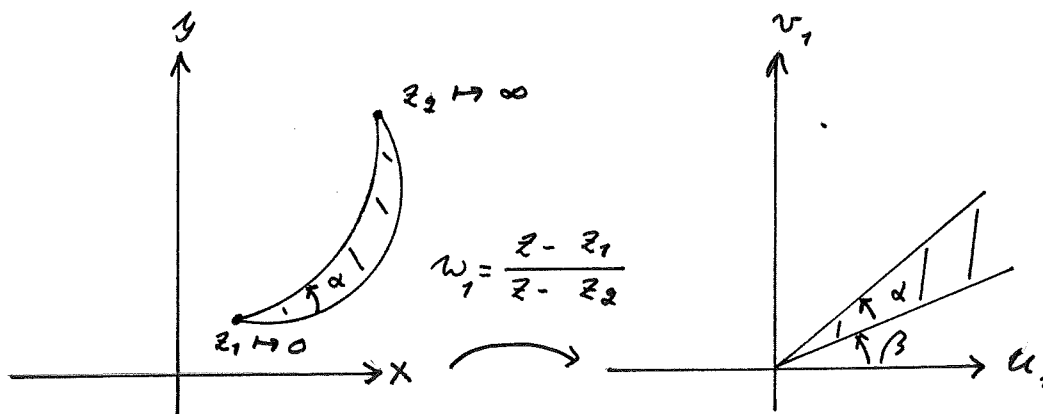
Låt oss kalla våra hörnpunkter för z_1 och z_2 .



Idén är att vi ska reducera oss till föregående fall genom att skicka z_1 till 0 och z_2 till ∞ med hjälp av Möbiusfunktionen

$$w_1 = \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

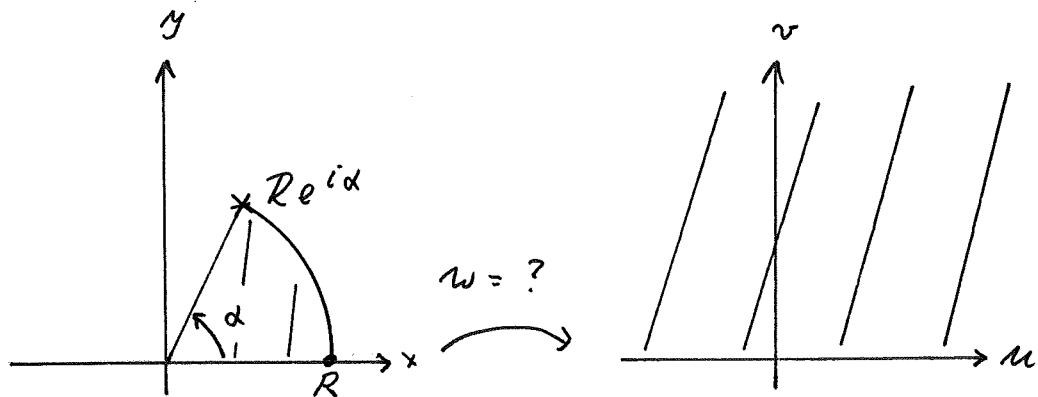
”Cirkel”-bågarna som begränsar ”cirkel”-tvåhörningen avbildas då på nya ”cirkel”-bågar – men eftersom dessa går genom ∞ , så måste de vara räta linjestycken:



Detta innebär att bildområdet i w_1 -planet är ett *vinkelområde*, så sedan kan vi fortsätta som vi gjorde tidigare och sätta

$$w = e^{-i\frac{\beta\pi}{\alpha}} (w_1)^{\pi/\alpha} = e^{-i\frac{\beta\pi}{\alpha}} \cdot \left(\frac{z - z_1}{z - z_2} \right)^{\pi/\alpha}$$

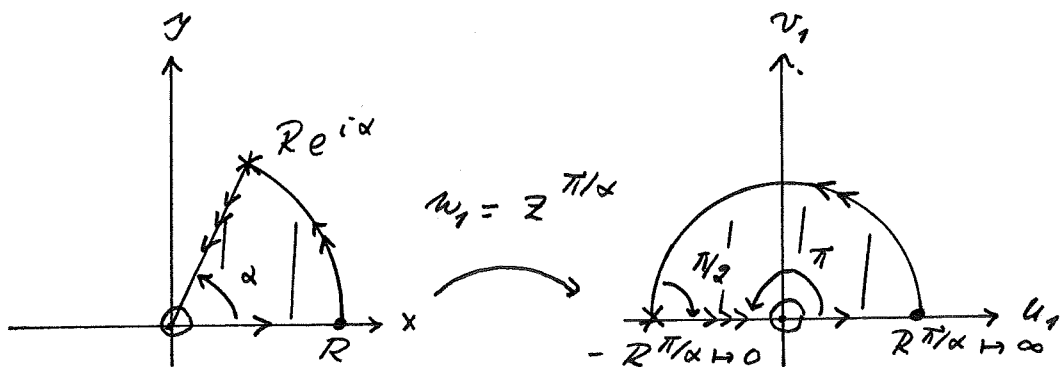
4. Cirkelsektor på övre halvplanet. Här vill vi avbilda cirkelsektorn $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = r \cdot e^{i\theta} \text{ med } 0 \leq r < R \text{ och } 0 < \theta < \alpha\}$ (där α är någon vinkel mellan 0 och 2π) på övre halvplanet $\{w \in \mathbb{C} \mid \text{Im } w > 0\}$.



Byt först vinkeln α mot π genom att sätta $w_1 = z^{\pi/\alpha}$. Med $z = r \cdot e^{i\theta}$ blir då

$$w_1 = r^{\pi/\alpha} \cdot e^{i\frac{\theta\pi}{\alpha}}$$

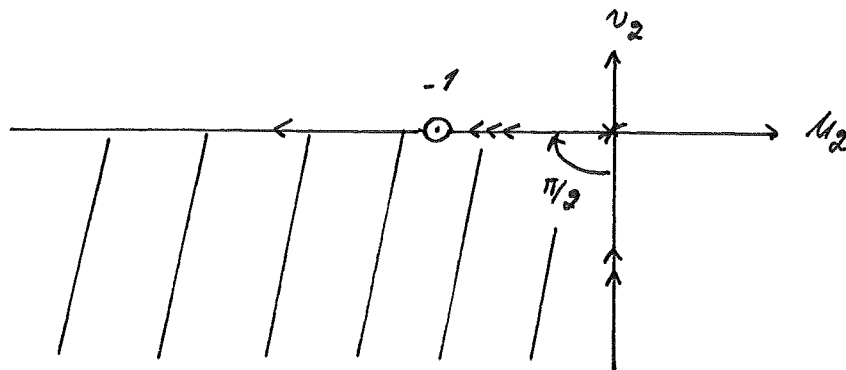
där $0 \leq |w_1| < R^{\pi/\alpha}$ och $0 < \arg w_1 < \frac{\theta\pi}{\alpha} < \pi$, så att vi får en halvcirkel i övre w_1 -planet med radien $R^{\pi/\alpha}$ eller ekvivalent en "cirkel"-tvåhörning med hörnen i $\pm R^{\pi/\alpha}$:



Sedan kan vi fortsätta som i punkt 3: skicka t.ex. $w_1 = -R^{\pi/\alpha}$ till 0 och $w_1 = R^{\pi/\alpha}$ till ∞ genom

$$w_2 = \frac{w_1 + R^{\pi/\alpha}}{w_1 - R^{\pi/\alpha}} = \frac{z^{\pi/\alpha} + R^{\pi/\alpha}}{z^{\pi/\alpha} - R^{\pi/\alpha}}$$

$w_1 = 0$ avbildas då på $w_2 = -1$, och det räta linjestycket $\{w_1 \in \mathbb{C} \mid -R^{\pi/\alpha} \leq \operatorname{Re} w_1 < R^{\pi/\alpha} \text{ och } \operatorname{Im} w_1 = 0\}$ avbildas på negativa reella axeln i w_2 -planet. Eftersom den räta vinkeln vid $w_1 = -R^{\pi/\alpha}$ bevaras, så innebär detta att bilden av halvcirkeln i w_1 -planet blir tredje kvadranten i w_2 -planet:



Vi kan därefter avbilda tredje kvadranten på den första genom att vrida med vinkeln $(-\pi)$ – d.v.s. vi sätter

$$w_3 = e^{-i\pi} w_2 = -w_2$$

Slutligen avbildar vi första kvadranten på övre halvplanet genom att kvadrera:

$$w = w_3^2 = (-w_2)^2 = w_2^2 = \left(\frac{z^{\pi/\alpha} + R^{\pi/\alpha}}{z^{\pi/\alpha} - R^{\pi/\alpha}} \right)^2.$$

Om vi istället vill avbilda cirkelsektorn på enhetsskivan, så kan vi fortsätta med att avbilda övre halvplanet på enhetsskivan som i punkt 1.

5. Halvbandet $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ på övre halvplanet.

Låt oss först undersöka hur exponentialfunktionen avbildar \mathcal{D} genom att se hur \mathcal{D} 's rand avbildas under $w_1 = e^z$:

$$z = x + i0 \text{ med } -\infty < x \leq 0 \implies w_1 = e^{x+i0} = e^x \text{ med } 0 < e^x \leq 1;$$

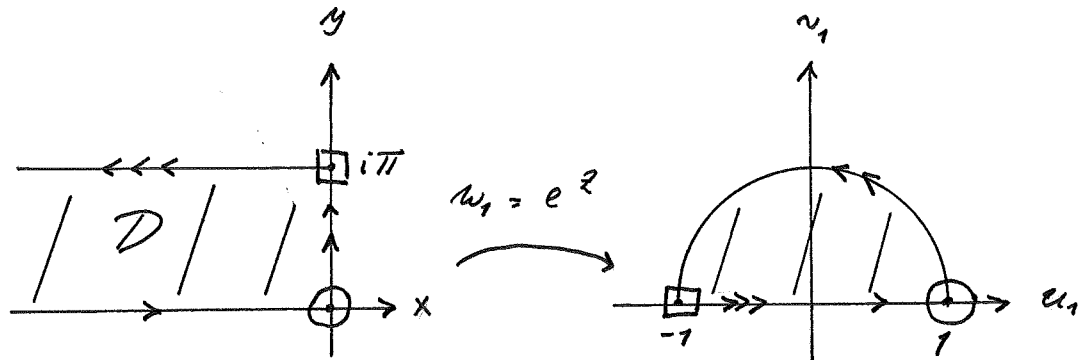
$$z = 0 + iy \text{ med } 0 \leq y \leq \pi \implies w_1 = e^{iy};$$

$$z = x + i\pi \text{ där } x \text{ går från } 0 \text{ till } -\infty \implies w_1 = e^{x+i\pi} = -e^x,$$

där $-e^x$ växer från -1 till 0 .

Om man kontrollerar randens orientering så ser man att bilden i w_1 -planet

blir halvcirkeln $\{w_1 \in \mathbb{C} \mid |w_1| < 1 \text{ och } 0 < \arg w_1 < \pi\}$:



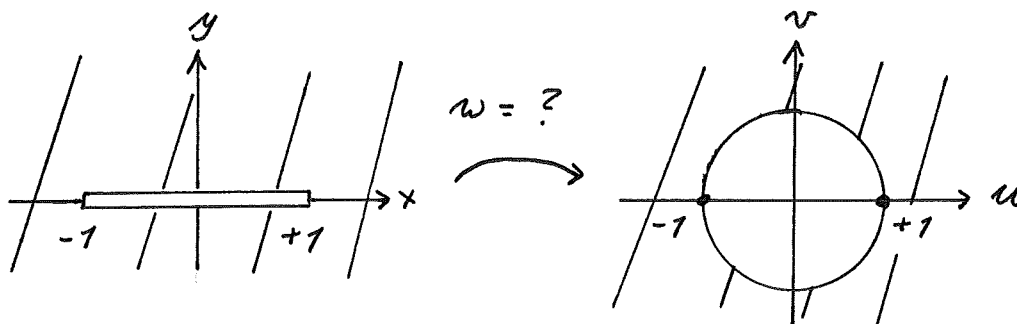
Sedan kan vi försätta som i föregående punkt: vi kan skicka hörnpunkten $w_1 = -1$ till 0 och hörnpunkten $w_1 = 1$ till ∞ genom Möbiustransformationen

$$w_2 = \frac{w_1 + 1}{w_1 - 1},$$

varigenom halvcirkeln avbildas på tredje kvadranten i w_2 -planet. Till slut avbildar vi tredje kvadranten på övre halvplanet genom att kvadrera, och får då tillsammans

$$\begin{aligned} w = w_2^2 &= \left(\frac{w_1 + 1}{w_1 - 1} \right)^2 = \left(\frac{e^z + 1}{e^z - 1} \right)^2 = \left(\frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}} \right)^2 \\ &= \left(\coth \frac{z}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

6. Ytterområdet till slitsen $\{z \in \mathbb{C} \mid -1 \leq \operatorname{Re} z \leq 1, \operatorname{Im} z = 0\}$ på utsidan av enhetscirkeln.



Vi börjar med att skicka -1 till 0 och $+1$ till ∞ med hjälp av Möbiusfunktionen

$$w_1 = \frac{z+1}{z-1}.$$

Slitsen är en del av en "cirkel", och bilden blir därför också en del av en "cirkel". Eftersom

$$-1 \mapsto 0, \quad 0 \mapsto -1 \quad \text{och} \quad +1 \mapsto \infty,$$

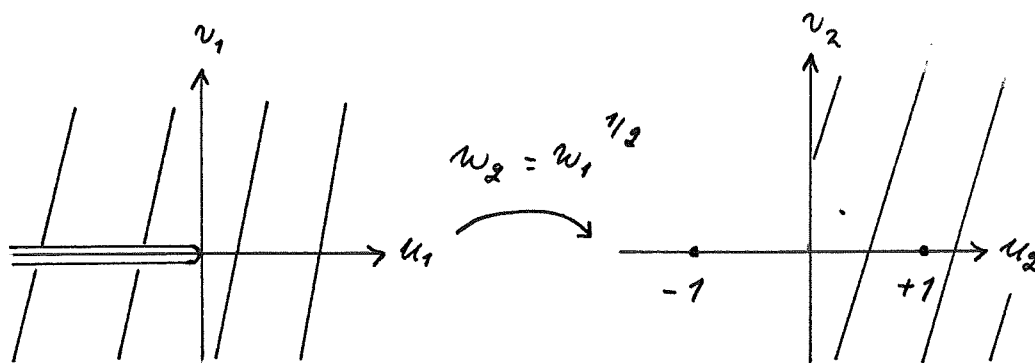
så blir bilden av slitsen lika med negativa reella axeln, och dess ytterområde avbildas på ytterområdet till denna halvaxel, d.v.s. till

$$\{w_1 \in \mathbb{C} \mid -\pi < \arg w_1 < \pi\}.$$

Vi avbildar sedan detta område på högra halvplanet genom att halvera vinkeln:

$$w_2 = w_1^{1/2} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{1/2},$$

så att $-\frac{\pi}{2} < \arg w_2 < \frac{\pi}{2}$:



För att avbilda högra w_2 -planet på utsidan av enhetscirkeln gör vi sedan som i punkt 1 och skickar imaginära axelns spegelpunkter -1 och $+1$ till 0 respektive ∞ :

$$w = \frac{w_2 + 1}{w_2 - 1} = \frac{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{1/2} + 1}{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{1/2} - 1} = \frac{\sqrt{z+1} + \sqrt{z-1}}{\sqrt{z+1} - \sqrt{z-1}},$$

vilket ger den önskade avbildningen. Låt oss dock försöka förenkla detta gräsliga uttryck genom att förlänga med nämnarens konjugatkvantitet:

$$w = \frac{\sqrt{z+1} + \sqrt{z-1}}{\sqrt{z+1} - \sqrt{z-1}} \cdot \frac{\sqrt{z+1} + \sqrt{z-1}}{\sqrt{z+1} + \sqrt{z-1}} = \frac{z+1 + z-1 + 2\sqrt{z^2-1}}{z+1 - (z-1)}$$

$$= z + \sqrt{z^2-1}.$$

Inversen till denna funktion avbildar utsidan av enhetscirkeln på yttrområdet till slitsen. Vi beräknar denna genom att lösa ut z :

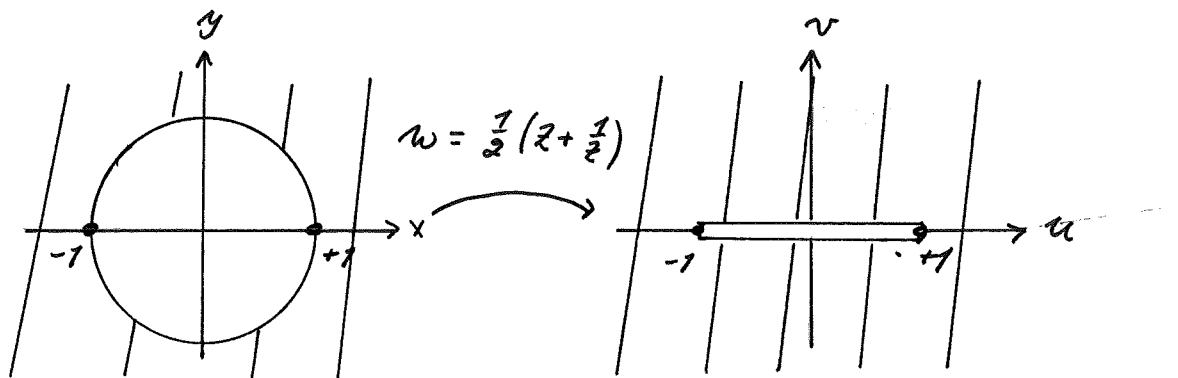
$$\sqrt{z^2-1} = w - z \implies z^2 - 1 = w^2 - 2zw + z^2 \iff 2zw = w^2 + 1 \iff$$

$$z = \frac{1}{2} \frac{w^2 + 1}{w} = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right).$$

Byter vi z och w mot varandra så får vi den s.k. *Joukowskifunktionen*:

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

Den har alltså följande avbildningsegenskap:



Låt oss se efter hur Joukowskifunktionen avbildar övre halvan av detta område i z -planet – d.v.s. $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0 \text{ och } |z| > 1\}$ – genom att som vanligt undersöka hur randen $L_1 \cup L_2 \cup L_3$ avbildas, där $L_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid -\infty < \text{Re } z \leq -1 \text{ och } \text{Im } z = 0\}$, $L_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = e^{i\theta}, \text{ där } 0 \leq \theta \leq \pi\}$ och $L_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq \text{Re } z < \infty \text{ och } \text{Im } z = 0\}$.

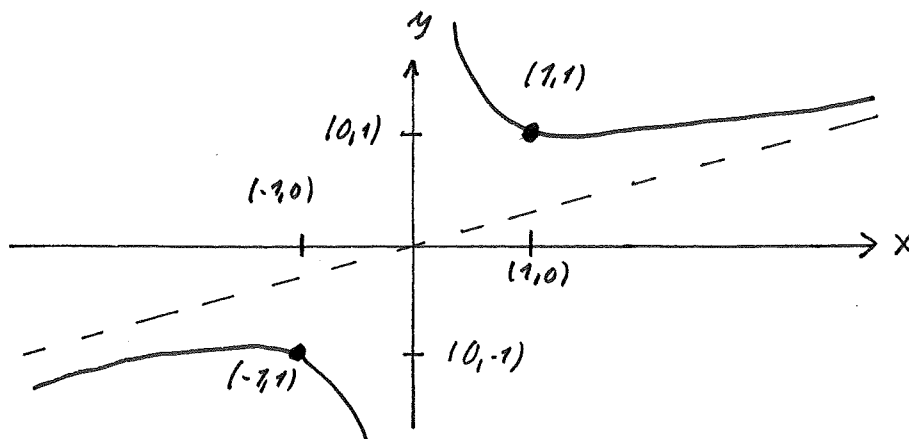
På L_1 och L_3 är $z = x = \text{reell}$, så där blir w också reell:

$$w = f(x) := \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right).$$

Funktionen $y = f(x)$ har uppenbarligen $y = x/2$ och $x = 0$ som asymptoter, och vi får lokala extrempunkter genom

$$0 = f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \iff x = \pm 1.$$

Därför ser grafen av $f(x)$ ut på följande sätt:



På L_1 växer x från $-\infty$ till -1 , och vi ser att $w = f(x)$ då växer från $-\infty$ till -1 .

På L_3 växer x från $+1$ till ∞ , och då växer $w = f(x)$ också från $+1$ till ∞ .

På L_2 , slutligen, är $z = e^{i\theta}$, så där blir

$$w = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \cos \theta,$$

som växer från -1 till $+1$ då θ avtar från π till 0 .

Så \mathcal{D} 's rand $L_1 \cup L_2 \cup L_3$ avbildas på hela reella w -axeln, genomlöst från vänster till höger, vilket innebär att \mathcal{D} själv avbildas på *övre halvplanet*.

Låt oss därefter undersöka hur Joukowskifunktionen avbildar övre halvan av enhetsskivan, d.v.s. $\{\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \text{ och } 0 < \arg z < \pi\}\}$. \mathcal{D} 's rand är $L \cup C$, där $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1 \text{ och } y = 0\}$ och $C = \{z = e^{i\theta} \mid 0 < \theta < \pi\}$.

På L är

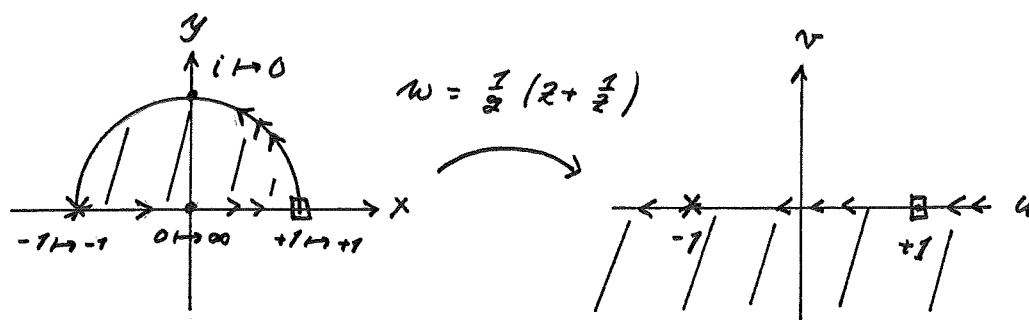
$$w = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right).$$

Då x går från -1 till 0 , går w enligt figuren ovan från -1 till $-\infty$, och då x går från 0 till 1 går w från $+\infty$ till 1 .

På C är

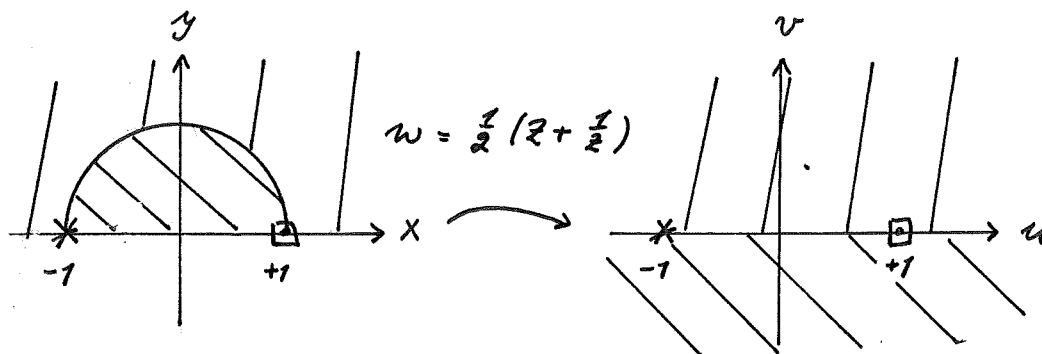
$$w = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \cos \theta,$$

som går från $+1$ till -1 då θ går från 0 till π . Detta ger följande figur:



Om man tillämpar högerhandsregeln på bilden av \mathcal{D} 's rand – som alltså utgörs av reella w -axeln genomlöst från höger till vänster – så ser man att \mathcal{D} avbildas på den *undre* halvan av w -planet.

Tillsammans får vi:



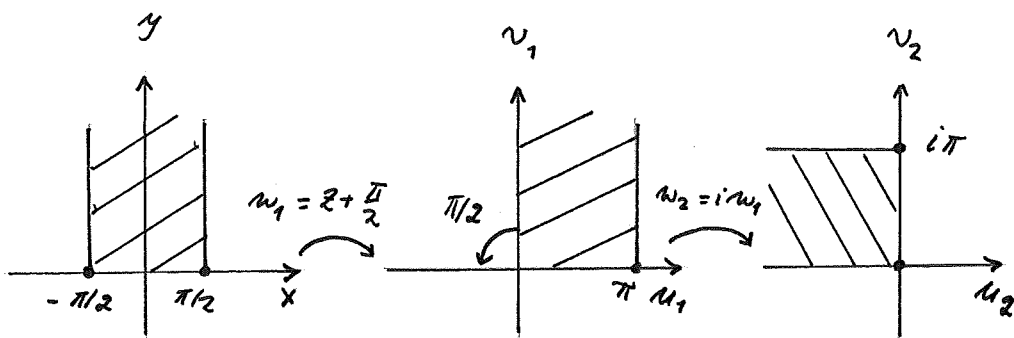
7. Halvbandet $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2 \text{ och } \operatorname{Im} z > 0\}$ på övre halvplanet.

Variant 1. Flytta först halvbandet $\pi/2$ enheter till höger genom att sätta

$$w_1 = z + \frac{\pi}{2}.$$

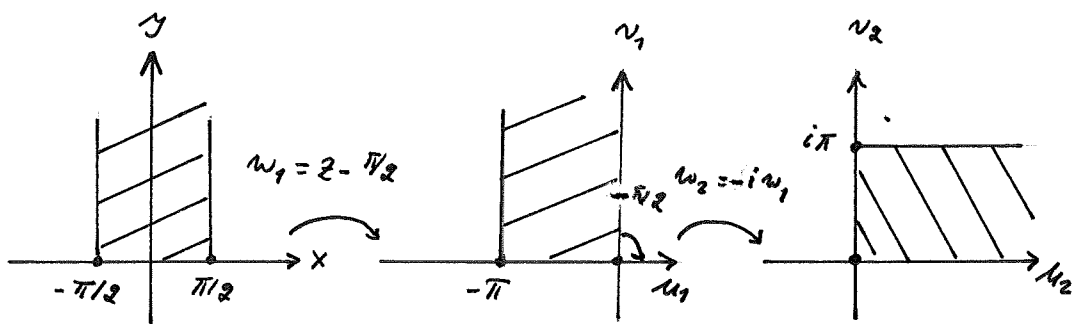
Genom att sedan vrida det nya halvbandet vinkeln $\pi/2$ fås halvbandet i punkt 5:

$$w_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}w_1 = iw_1 = iz + i\frac{\pi}{2}.$$



Sedan fortsätter man som i punkt 5.

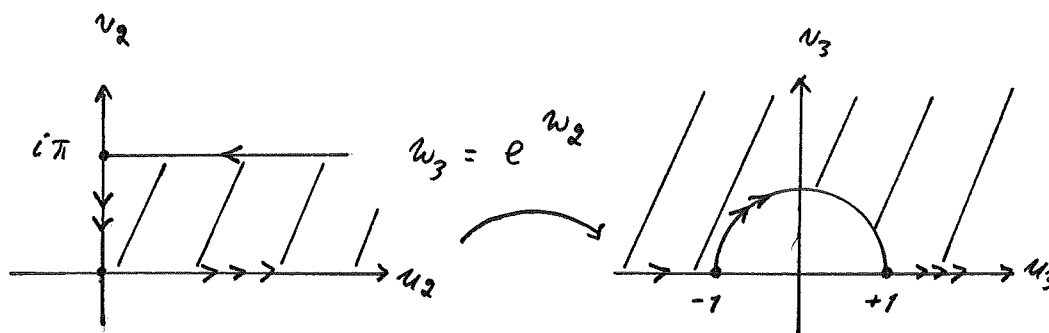
Variant 2. Börja istället med att flytta det givna halvbandet $-\pi/2$ enheter till vänster genom att sätta $w_1 = z - \pi/2$, och vrid sedan den erhållna figuren vinkeln $-\pi/2$ genom $w_2 = e^{-i\pi/2}w_1 = -i(z - \pi/2) = -iz + i\pi/2$:



Bilden \mathcal{D}_2 i w_2 -planet blir alltså det horisontella halvbandet $\{w_2 \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \text{ och } 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$. Låt oss härnäst avbilda \mathcal{D}_2 med hjälp av exponentialfunktionen:

$$w_3 = e^{w_2} = e^{-iz + i\pi/2} = e^{-iz} \cdot i.$$

Genom att som vanligt undersöka hur \mathcal{D} 's rand avbildas, så ser vi att bildmängden i w_3 -planet blir $\{w_3 \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} w_3 > 0 \text{ och } |w_3| > 1\}$:



Det önskade slutresultatet fås sedan med Joukowski:

$$w = \frac{1}{2} \left(w_3 + \frac{1}{w_3} \right) = \frac{1}{2} (ie^{-iz} - ie^{iz}) = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = \sin z.$$

Vi har alltså visat att sinusfunktionen avbildar halvbandet $\{z \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2 \text{ och } \operatorname{Im} z > 0\}$ på övre halvplanet – vilket stämmer överens med ett tidigare resultat från avsnitt 9.

Tillämpning. Låt oss utnyttja detta resultat för att lösa följande Dirichlet-problem:

Bestäm en funktion $g(x, y)$ som uppfyller Laplaces ekvation i $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < \pi/2 \text{ och } y > 0\}$ och som har följande randvärden:

$$\begin{cases} g(0, y) = 1 & \text{då } y > 0, \\ g(x, 0) = 3 & \text{då } 0 < x < \pi/2, \\ g(\pi/2, y) = 3 & \text{då } y > 0. \end{cases}$$

\mathcal{D} är alltså bara högra halvan av det halvband som vi tittade på ovan, men låt oss ändå gissa att koordinattransformationen $w = \sin z$ ger en förenkling!

Låt oss som vanligt se hur \mathcal{D} 's rand avbildas.

Då $z = iy$, där y avtar från ∞ till 0, är

$$w = \sin(iy) = \frac{1}{2i} (e^{-y} - e^y) = i \cdot \frac{1}{2} (e^y - e^{-y}) = i \cdot \sinh y,$$

där $\sinh y$ avtar från ∞ till 0.

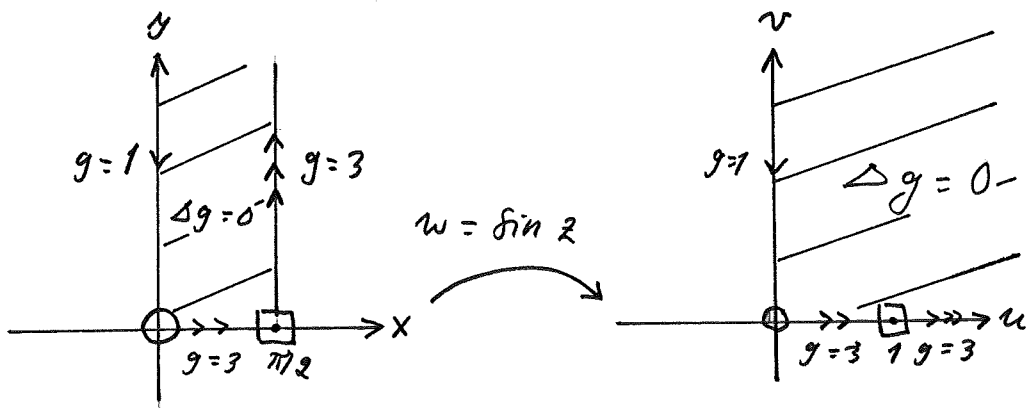
Då $z = x$, där x växer från 0 till $\pi/2$, så är $w = \sin x$, som växer från 0 till 1.

Då $z = \pi/2 + iy$, där y växer från 0 till ∞ är

$$\begin{aligned} w &= \sin(\pi/2 + iy) = \frac{1}{2i} (e^{i\pi/2} \cdot e^{-y} - e^{-i\pi/2} \cdot e^y) = \frac{1}{2i} (ie^{-y} + ie^y) \\ &= \frac{1}{2} (e^y + e^{-y}) = \cosh y, \end{aligned}$$

som växer från 1 till ∞ .

Så bilden av halvbandet under sinusfunktionen blir första kvadranten $\{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \text{ och } \operatorname{Im} z > 0\}$ i w -planet:



Sedan tidigare minns vi att $\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$, så uttryckt i reella koordinater ges koordinattransformationen av

$$\begin{cases} u = \sin x \cosh y, \\ v = \cos x \sinh y. \end{cases}$$

Det transformerade Dirichletproblemet blir därför:

$$\begin{cases} \Delta g = 0 & \text{då } u > 0 \text{ och } v > 0, \\ g(0, v) = 1 & \text{då } v > 0, \\ g(u, 0) = 3 & \text{då } u > 0. \end{cases}$$

För att hitta en lösning till detta problem observerar vi att logaritmfunktionen

$$\log w = \ln |w| + i \arg w$$

kan göras entydig i första kvadranten genom att man väljer att ge argumentet värdena $0 < \arg w < \pi/2$ där. Eftersom $\log w$ är analytisk i detta område så följer det att imaginärdelen $\arg w$ är harmonisk i samma mängd. Nu är

$$\arg(0 + iv) = \pi/2 \text{ då } v > 0, \text{ och } \arg(u + i0) = 0 \text{ då } u > 0,$$

så $\arg w$ har inte riktigt de önskade randvärdena. Men det kan vi enkelt åtgärda genom att sätta

$$g(u, v) = 3 - \frac{4}{\pi} \arg(u + iv) = 3 - \frac{4}{\pi} \arctan\left(\frac{v}{u}\right),$$

vilket alltså är lösningen i uv -planet. Lösningen till originalproblemet fås sedan genom att gå tillbaka till x - och y -variablerna. Då blir

$$\frac{v}{u} = \frac{\cos x \sinh y}{\sin x \cosh y} = \cot x \cdot \tanh y,$$

och

$$g(x, y) = 3 - \frac{4}{\pi} \arctan(\cot x \cdot \tanh y).$$

12. Exempel på randvärdesproblem

Låt oss nu använda våra kunskaper om konforma avbildningar för att lösa ytterligare några randvärdesproblem för lösningar till Laplaces ekvation. Som exempel på tillämpningsområden kan följande tre nämnas.

1. I den teoretiska elektrotekniken lär man sig att det elektriska fältet \mathbf{E} är lika med minus gradienten av en potentialfunktion V :

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V,$$

och att V uppfyller Laplaces ekvation i ett laddningsfritt område:

$$\Delta V = 0.$$

Vidare är potentialen *konstant* på en elektrisk ledare, och detta faktum kommer att ge oss konstanta randvärden i de följande exemplen.

2. Jämviktstemperaturen T (som alltså definitionsmässigt är tidsberoende) uppfyller Laplaces ekvation:

$$\Delta T = 0.$$

Värmeflödet Q ges sedan av

$$Q = -k \text{ grad } T,$$

där k är en positiv konstant. (Minustecknet visar att värmen strömmar från högre till lägre temperaturer.)

3. För en strömmande vätska ges flödes hastigheten V som gradienten av en potentialfunktion ϕ :

$$V = \text{grad } \phi,$$

där

$$\Delta \phi = 0$$

om strömningen är inkompressibel och virvelfri.

1. Bestäm en harmonisk funktion $g(x, y)$ i enhetsskivan som är lika med 1 på övre halvcirkeln och lika med -1 på den undre!

Tillämpningar. Betrakta enhetscirkeln som tvärsnittet av en cylinder, som egentligen består av en övre och en undre cylinderhalva.

1. *Elektrostatik.* Låt cylinderhalvorna vara elektriska ledare, där den övre har potentialen $+1$ och den undre potentialen -1 . Vad blir den elektrostatiska potentialen mellan dessa båda ledare?
2. *Värmeteorik.* Temperaturen i den övre cylinderhalvan är konstant lika med $+1$, och i den undre konstant lika med -1 . Bestäm temperaturen mellan cylinderhalvorna!

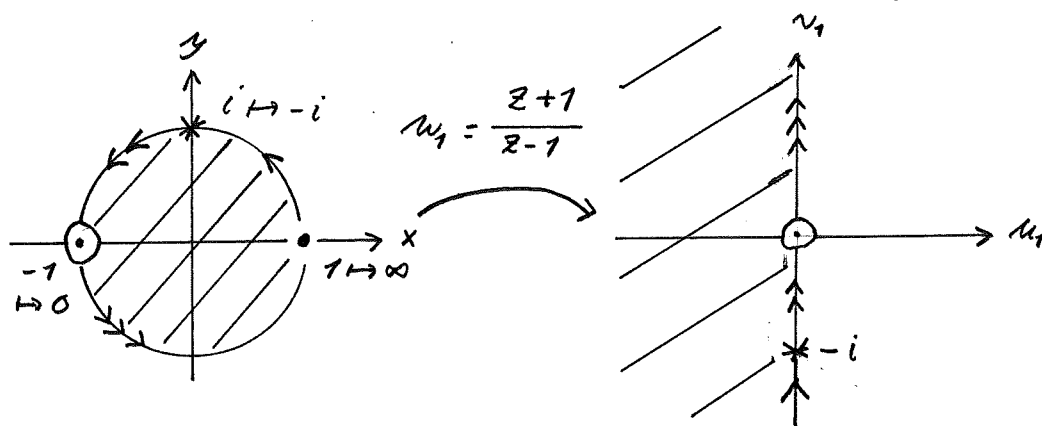
Vi förenklar detta problem genom att avbilda enhetsskivan konformt på det övre halvplanet. Denna avbildning gicks visserligen igenom i början av det förra avsnittet, men eftersom vi hunnit glömma detta kan vi resonera som följer.

Enhetscirkeln skall således avbildas på en rät linje – nämligen reella axeln – och det ligger därför nära till hands att prova med en Möbiusfunktion. Låt oss t.ex. skicka $z = -1$ till $w_1 = 0$ och $z = 1$ till $w_1 = \infty$ genom

$$w_1 = \frac{z+1}{z-1}.$$

Vi vet att bilden är en "cirkel", och eftersom den går genom ∞ är det fråga om en rät linje. En punkt på denna är $w = 0$; för att bestämma linjen räcker det sedan med att hitta ytterligare en punkt. Sätt t.ex. in $z = i$:

$$z = i \Rightarrow w_1 = \frac{i+1}{i-1} = -\frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = -\frac{2i}{2} = -i.$$



Bilden av enhetscirkeln genomlöpt i positiv led blir alltså imaginära w_1 -axeln genomlöpt uppåt. Därmed kommer enhetsskivan att avbildas på väns-

tra w_1 -halvplanet. För att få det övre halvplanet vrider vi sedan med vinkeln $(-\pi/2)$:

$$w = e^{-i\pi/2} w_1 = -i w_1 = -i \cdot \frac{z+1}{z-1} = i \cdot \frac{1+z}{1-z}.$$

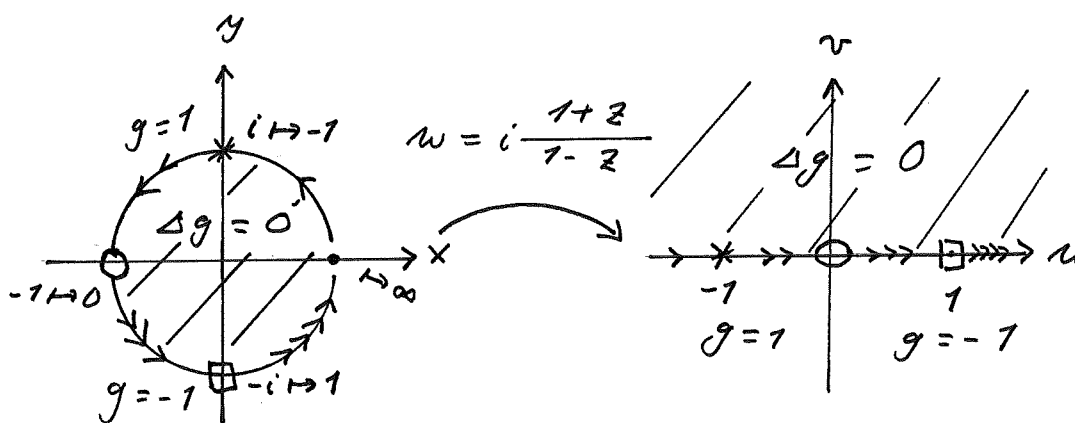
Låt oss sätta in några punkter för att kontrollera att denna avbildning gör det som den ska:

$$z = 1 \Rightarrow w = \infty,$$

$$z = i \Rightarrow w = i \cdot \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = i \cdot \frac{2i}{2} = -1,$$

$$z = -1 \Rightarrow w = 0,$$

$$z = -i \Rightarrow w = i \cdot \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = i \cdot \frac{-2i}{2} = 1.$$



Speciellt ser vi att den övre delen av enhetscirkeln avbildas på negativa reella axeln, medan den undre delen avbildas på positiva reella axeln.

Vårt problem i de nya koordinaterna består därmed i att hitta en funktion $g(u, v)$ som uppfyller följande:

$$\begin{cases} \Delta g = 0 & \text{då } v > 0; \\ g(u, 0) = \begin{cases} +1 & \text{då } u < 0, \\ -1 & \text{då } u > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Nu vet vi att $\arg w$ är harmonisk (då $w \neq 0$), och vi kan göra denna funktion entydig i övre halvplanet genom att kräva att $0 \leq \arg w \leq \pi$ där. Då blir

$$\arg(u + i0) = \begin{cases} 0 & \text{då } u > 0, \\ \pi & \text{då } u < 0. \end{cases}$$

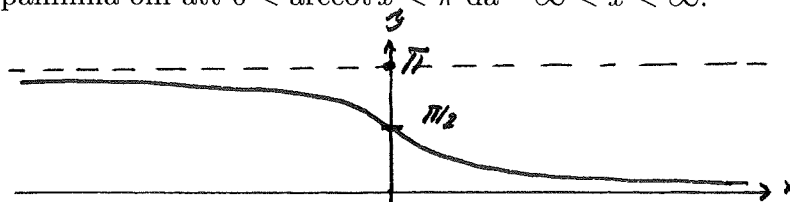
För att få de föreskrivna randvärdena sätter vi

$$g(u, v) = \frac{2}{\pi} \arg(u + iv) - 1$$

– för då blir

$$g(u, 0) = \begin{cases} 0 - 1 = -1 & \text{då } u > 0, \\ \frac{2}{\pi} \cdot \pi - 1 = +1 & \text{då } u < 0. \end{cases}$$

Låt oss påminna om att $0 < \operatorname{arccot} x < \pi$ då $-\infty < x < \infty$:



Detta visar att när vi befinner oss i övre halvplanet (med $0 < \arg w < \pi$) är det lämpligt att uttrycka $\arg(u + iv)$ som

$$\arg(u + iv) = \operatorname{arccot} \left(\frac{u}{v} \right).$$

Därmed blir

$$g(u, v) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arccot} \left(\frac{u}{v} \right) - 1.$$

Sedan återstår det att gå tillbaka till x - och y -variablerna. Vi har

$$\begin{aligned} u + iv &= i \cdot \frac{1 + z}{1 - z} = i \cdot \frac{(1 + x) + iy}{(1 - x) - iy} \cdot \frac{(1 - x) + iy}{(1 - x) + iy} \\ &= i \cdot \frac{1 - x^2 - y^2 + i \cdot 2y}{(1 - x)^2 + y^2} = \frac{-2y}{(1 - x)^2 + y^2} + i \cdot \frac{1 - x^2 - y^2}{(1 - x)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

så att

$$\frac{u}{v} = \frac{-2y}{1 - x^2 - y^2}.$$

Vi får alltså följande **SVAR**:

$$g(x, y) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arccot} \left(\frac{-2y}{1 - x^2 - y^2} \right) - 1.$$

Kontroll av randvärdena: Då (x, y) går mot övre halvan av enhetscirkeln är $y > 0$ medan $1 - x^2 - y^2 \rightarrow 0+$, vilket betyder att

$$g(x, y) \rightarrow \frac{2}{\pi} \operatorname{arccot}(-\infty) - 1 = \frac{2}{\pi} \cdot \pi - 1 = 2 - 1 = 1.$$

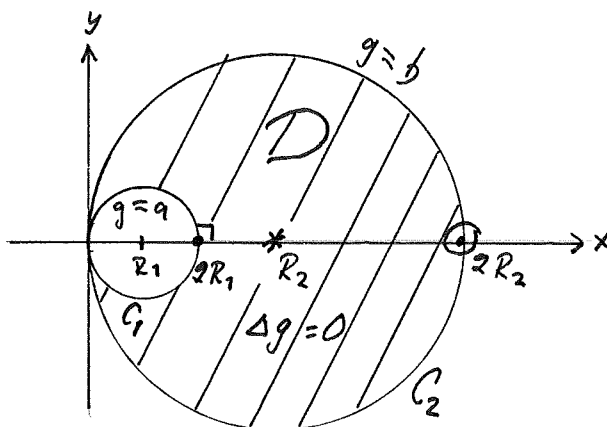
Om (x, y) istället går mot den undre halvan blir enda skillnaden att $y < 0$, och då får vi istället

$$g(x, y) \rightarrow \frac{2}{\pi} \operatorname{arccot}(+\infty) - 1 = 0 - 1 = -1.$$

2. Antag att $0 < 2R_1 < R_2$, och låt

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - R_1)^2 + y^2 > R_1^2 \text{ och } (x - R_2)^2 + y^2 < R_2^2\}.$$

Då begränsas \mathcal{D} av cirkelarna $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - R_1)^2 + y^2 = R_1^2\}$ respektive $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - R_2)^2 + y^2 = R_2^2\}$:



Vi vill nu lösa följande Dirichletproblem:

$$\begin{cases} \Delta g = 0 & \text{i } \mathcal{D}, \\ g = a & \text{på } C_1 \setminus \{0\}, \\ g = b & \text{på } C_2 \setminus \{0\}, \end{cases}$$

där a och b är givna konstanter.

Tillämpningar. Vi har två cylindrar med den mindre inuti den större, och vi betraktar tvärsnittsytan \mathcal{D} mellan dessa.

1. *Elektrostatik.* Cylinderytorna är ledare, där den mindre har potentialen $= a$, och den större potentialen $= b$. Vad blir potentialen mellan dessa?
2. *Värmeteorik.* Om temperaturen på den yttre cylinderytan är $= a$ och på den inre $= b$, vad blir då temperaturen mellan dessa?

Detta problem *borde* förenklas om vi kunde göra om cirklarna till räta linjer. Eftersom räta linjer har ∞ som gemensam punkt, så måste vi skicka en *gemensam punkt* för cirklarna till ∞ – men det finns bara *en* sådan punkt, nämligen $z = 0$. Om vi vill att bilden av C_1 ska gå genom origo, så kan vi dessutom skicka $z = 2R_1$ till 0. Den enklaste Möbiusfunktion som gör detta är

$$w = \frac{z - 2R_1}{z}.$$

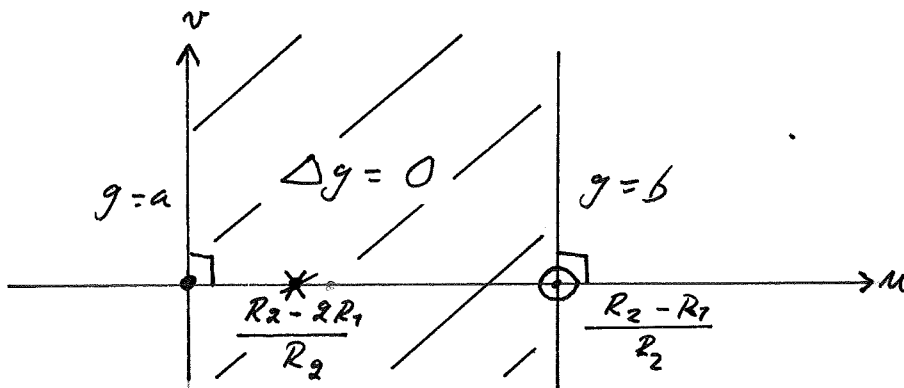
Vi vet redan att C_2 avbildas på en rät linje genom origo. Låt oss sätta in en punkt på C_2 , och se var den hamnar:

$$z = 2R_2 \implies w = \frac{2R_2 - 2R_1}{2R_2} = \frac{R_2 - R_1}{R_2}.$$

Detta betyder att C_2 avbildas på en rät linje genom punkten $w = (R_2 - R_1)/R_1$. För att fastlägga bildlinjerna räcker det sedan med att sätta in ytterligare en punkt från var och en av cirklarna. Eller om man tycker att det är jobbigt att räkna, så kan man istället resonera så här:

z reell $\implies w$ reell, så att x -axeln avbildas på u -axeln.

Eftersom våra cirklar är vinkelräta mot x -axeln och Möbiusfunktioner bevarar vinklar, så måste bildlinjerna vara vinkelräta mot u -axeln, d.v.s.:



Då den inre punkten $z = R_2$ avbildas på $w = (R_2 - 2R_1)/R_1$, så måste den senare vara en inre punkt i bildområdet. Vi inser då att bilden av \mathcal{D} under $w = (z - 2R_1)/z$ ges av bandet

$$\left\{ w \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} w < \frac{R_2 - R_1}{R_2} \right\}.$$

Det ursprungliga problemet har därmed transformerats till följande problem i uv -planet:

Bestäm en funktion $g(u, v)$ som uppfyller

$$\begin{cases} \Delta g = 0 & \text{då } 0 < u < \frac{R_2 - R_1}{R_2}, \\ g(0, v) = a & \text{då } -\infty < v < \infty, \\ g\left(\frac{R_2 - R_1}{R_2}, v\right) = b & \text{då } -\infty < v < \infty. \end{cases}$$

Men det är lätt att hitta ett sådant g : för godtyckliga konstanter A och B är det uppenbart att

$$g(u, v) = A + Bu$$

satisfierar Laplaces ekvation, och sedan behöver vi bara välja A och B så att

$$a = g(0, v) = A \quad \text{och} \quad b = g\left(\frac{R_2 - R_1}{R_2}, v\right) = A + B \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_2},$$

d.v.s.

$$A = a \quad \text{respektive} \quad B = \frac{R_2}{R_2 - R_1}(b - a).$$

Detta ger oss lösningen

$$g(u, v) = a + \frac{R_2 \cdot (b - a)}{R_2 - R_1} \cdot u$$

i u - och v -variablerna. För att lösa det ursprungliga problemet återstår det att uttrycka u med hjälp av x och y :

$$\begin{aligned} u = \operatorname{Re} w &= \operatorname{Re} \frac{z - 2R_1}{z} = \operatorname{Re} \left(\frac{(x - 2R_1) + iy}{x + iy} \cdot \frac{x - iy}{x - iy} \right) \\ &= \frac{x^2 - 2R_1x + y^2}{x^2 + y^2} = 1 - \frac{2R_1x}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Så det slutliga svaret blir

$$g(x, y) = a + \frac{R_2 \cdot (b - a)}{R_2 - R_1} \cdot \left(1 - \frac{2R_1x}{x^2 + y^2} \right).$$

3. Lös följande randvärdesproblem för Laplaces ekvation:

$$\begin{cases} \Delta g = 0 & \text{i } \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \text{ och } y > 0\} \\ & \text{= övre halvan av enhetsskivan,} \\ \frac{\partial g}{\partial \hat{n}} = 0 & \text{på halvcirkeln } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ och } y > 0\}, \\ g(x, 0) = \begin{cases} 10 & \text{då } -1 < x < 0, \\ 0 & \text{då } 0 < x < 1, \end{cases} \end{cases}$$

där \hat{n} betecknar den utåtriktade enhetsnormalen.

Tillämpning. Cirkelhalvskivan ses som tvärsnittsytan till en halvcylinder. Dess övre yta är värmeisolerad, vilket betyder att värmeflödet genom denna yta är lika med noll:

$$0 = Q \cdot \hat{n} = -k \operatorname{grad} T \cdot \hat{n} = -k \partial T / \partial \hat{n},$$

d.v.s. $\partial T / \partial \hat{n} = 0$ där. Ena halvan av den undre ytan har temperaturen = 10, den andra = 0. Bestäm temperaturen i halvcylindern!

För att förenkla problemet skulle vi vilja räta ut halvcirkeln, så att det blir lättare att uttrycka normalvektorn. Halvcirkeln ges av $z = e^{i\theta}$, där θ växer från 0 till π , och det betyder att $\log z = i\theta$ är rent imaginär där. Så låt oss prova med logaritmen!

$$\log z = \ln |z| + i \arg z$$

kan göras entydig då $\operatorname{Im} z \geq 0$, $z \neq 0$ genom att bestämma att $0 \leq \arg z \leq \pi$ där. Eftersom

$$z = x + i0, \text{ där } x \text{ växer från } -1 \text{ till } 0 \implies w = \log z = \ln |x| + i\pi,$$

$$\text{där } \ln |x| \text{ avtar från } 0 \text{ till } -\infty,$$

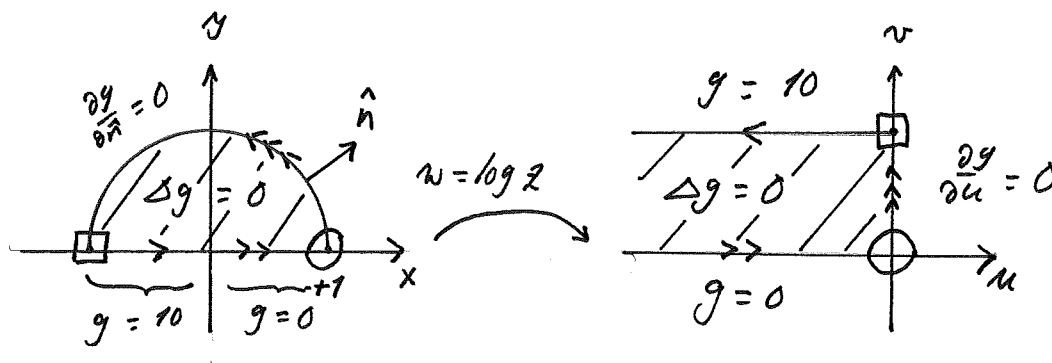
$$z = x + i0, \text{ där } x \text{ växer från } 0 \text{ till } 1 \implies w = \log z = \ln x$$

$$\text{som växer från } -\infty \text{ till } 0,$$

$$z = e^{i\theta}, \text{ där } \theta \text{ växer från } 0 \text{ till } \pi \implies \log z = i\theta,$$

inser vi att bildområdet blir halvbandet

$\{w \in \mathbb{C} \mid 0 < \text{Im } w < \pi \text{ och } \text{Re } w < 0\}$:



och att vårt problem transformeras till

$$\begin{cases} \Delta g = 0 & \text{då } u < 0 \text{ och } 0 < v < \pi, \\ g(u, 0) = 0 & \text{då } u < 0, \\ \frac{\partial g}{\partial u}(0, v) = 0 & \text{då } 0 < v < \pi, \\ g(u, \pi) = 10 & \text{då } u < 0. \end{cases}$$

Men här är det inte svårt att gissa en lösning: funktionen

$$g(u, v) = c \cdot v \quad (c = \text{konstant})$$

är naturligtvis harmonisk i hela uv -planet, uppfyller $\partial g / \partial u = 0$ överallt, är lika med 0 då $v = 0$ och lika med $c \cdot \pi$ då $v = \pi$. Så genom att välja $c = 10/\pi$ fås lösningen

$$\begin{aligned} g &= \frac{10}{\pi} v = \frac{10}{\pi} \text{Im } \log z = \frac{10}{\pi} \arg z \\ &= \frac{10}{\pi} \cdot \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{då } x > 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{då } x = 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{då } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

4. Låt $0 < R < a$, definiera cirkelarna

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + a)^2 + y^2 = R^2\} \quad \text{och} \\ C_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + y^2 = R^2\}, \end{aligned}$$

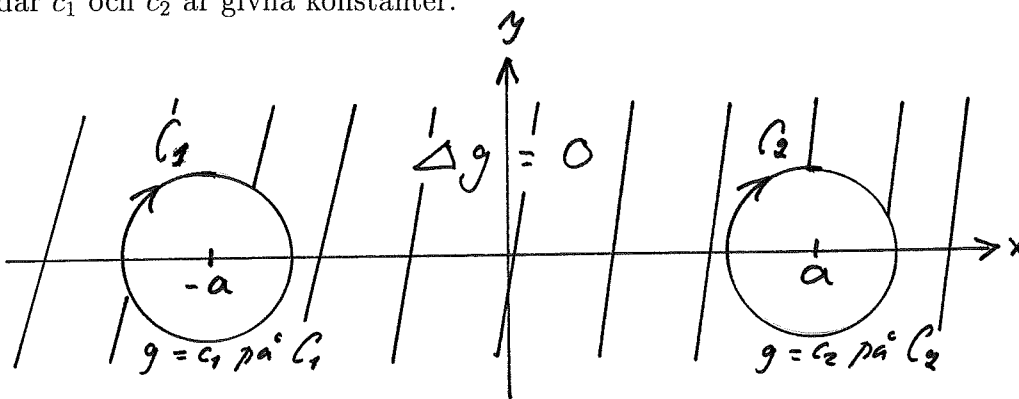
och låt till slut \mathcal{D} vara ytterområdet till dessa båda cirklar, d.v.s.

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + a)^2 + y^2 > R^2 \text{ och } (x - a)^2 + y^2 > R^2\}.$$

Lös följande Dirichletproblem i \mathcal{D} : Bestäm en funktion $g(x, y)$ som uppfyller

$$\begin{cases} \Delta g = 0 & \text{i } \mathcal{D}, \\ g = c_1 & \text{på } C_1, \\ g = c_2 & \text{på } C_2, \end{cases}$$

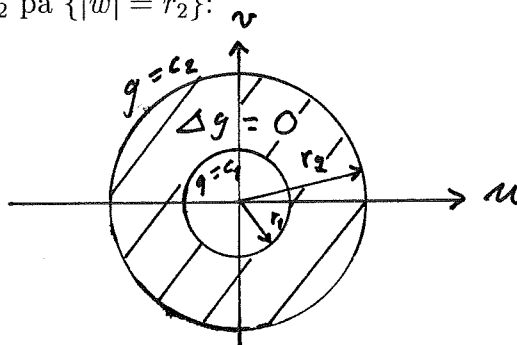
där c_1 och c_2 är givna konstanter.



Elektrostatisk tillämpning. Antag att vi har två parallella och lika tjocka ledare, där den ena har potentialen c_1 och den andra potentialen c_2 . Vad blir potentialen utanför dessa ledare?

Eftersom \mathcal{D} inte är enkelt sammanhängande kan vi omöjligt avbilda \mathcal{D} på vårt favoritområde övre halvplanet.

Påstående: Det är förnuftigt att avbilda \mathcal{D} på en cirkelring (d.v.s. området mellan två koncentriska cirklar) $\{w \in \mathbb{C} \mid r_1 < |w| < r_2\}$ så att C_1 avbildas på $\{|w| = r_1\}$ och C_2 på $\{|w| = r_2\}$:



Det kanske förefaller tveksamt om man kan göra på det sättet, men observera att om C_1 och C_2 vore två Apolloniska cirklar hörande till samma par av spegelpunkter, så hamnar vi i en situation som diskuterats i slutet av avsnitt 10 – och där såg vi att vi kan åstadkomma denna avbildning med hjälp av en Möbiusfunktion.

Det transformerade problemet blir i så fall

$$\begin{cases} \Delta g = 0 & \text{då } r_1 < |w| < r_2, \\ g = c_1 & \text{då } |w| = r_1, \\ g = c_2 & \text{då } |w| = r_2. \end{cases}$$

Detta löses genom att man observerar att $\ln |w|$ är konstant då $|w|$ är konstant och är harmonisk då $w \neq 0$, eftersom $\ln |w| = \operatorname{Re} \log w$ och $\log w$ är analytisk då $w \neq 0$; därmed är även $g = A \ln |w| + B$ harmonisk i vår cirkelring. Sedan återstår det bara att välja konstanterna A och B så att

$$\begin{cases} A \ln r_1 + B = c_1, \\ A \ln r_2 + B = c_2, \end{cases}$$

d.v.s.

$$A = \frac{c_2 - c_1}{\ln r_2 - \ln r_1}, \quad B = \frac{c_1 \ln r_2 - c_2 \ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1}.$$

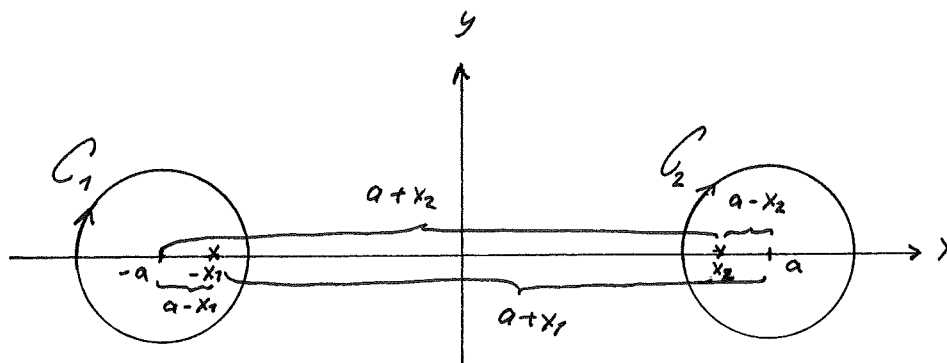
Därmed har vi fått lösningen till problemet i u - och v -koordinaterna:

$$g(u, v) = \frac{c_2 - c_1}{2 \ln(r_2/r_1)} \cdot \ln(u^2 + v^2) + \frac{c_1 \ln r_2 - c_2 \ln r_1}{\ln(r_2/r_1)}.$$

För att lösa ursprungsproblemet behöver vi alltså hitta en konform avbildning av \mathcal{D} på cirkelringen $\{w \in \mathbb{C} \mid r_1 < |w| < r_2\}$. Eftersom det är fråga om cirklar och Möbius tar ”cirklar” till ”cirklar”, så är det naturligt att försöka med en Möbiusfunktion $w = m(z)$.

Observera att cirkelarna $\{|w| = r_1\}$ och $\{|w| = r_2\}$ har 0 och ∞ som *gemensamma spegelpunkter*, och därför måste ursprungspunkterna $m^{-1}(0)$ och $m^{-1}(\infty)$ vara *gemensamma spegelpunkter till C_1 och C_2* . Vi ska alltså hitta punkter z_1 och z_2 som är gemensamma spegelpunkter till våra cirklar. Då dessa ligger på de förlängda radierna från medelpunkterna $-a$ och $+a$ på reella axeln, så måste de vara *reella*: $z_1 = -x_1$ och $z_2 = x_2$ med $x_1, x_2 > 0$. Och tänker man efter lite grann så inser man att de bör vara placerade på

följande sätt:



Spegelvillkoret med avseende på C_1 ger:

$$(a - x_1)(a + x_2) = R^2,$$

och motsvarande för C_2 :

$$(a - x_2)(a + x_1) = R^2.$$

Det vill säga:

$$\begin{cases} a^2 + ax_2 - ax_1 - x_1x_2 = R^2, \\ a^2 + ax_1 - ax_2 - x_1x_2 = R^2. \end{cases}$$

Andra ekvationen minus den första ger $2a(x_1 - x_2) = 0 \iff x_1 = x_2$. Låt oss kalla detta gemensamma värde för x .

Sedan fås

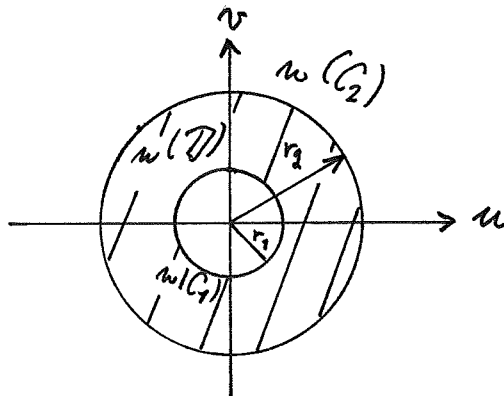
$$x^2 = a^2 - R^2 \iff x = \pm\sqrt{a^2 - R^2}.$$

Låt oss nu skicka spegelpunkten $-x_1 = -\sqrt{a^2 - R^2}$ till $w = 0$ (så att insidan av C_1 hamnar omkring $w = 0$) och spegelpunkten $x_2 = \sqrt{a^2 - R^2}$ till $w = \infty$ (så att insidan av C_2 hamnar omkring $w = \infty$) med hjälp av Möbiusfunktionen

$$w = \frac{z + \sqrt{a^2 - R^2}}{z - \sqrt{a^2 - R^2}}.$$

Då kommer C_1 och C_2 att avbildas på cirklar i w -planet med $w = 0$

som gemensam medelpunkt, och vårt område \mathcal{D} blir området *mellan* dessa cirklar:



För att bestämma radien r_1 kan man sätta in en godtycklig punkt på C_1 – t.ex. $z = -a - R$:

$$\begin{aligned} r_1 &= |w(-a - R)| = \left| \frac{-a - R + \sqrt{a^2 - R^2}}{-a - R - \sqrt{a^2 - R^2}} \right| \\ &= \frac{a + R - \sqrt{a^2 - R^2}}{a + R + \sqrt{a^2 - R^2}} = \frac{\sqrt{a + R}}{\sqrt{a + R}} \cdot \frac{\sqrt{a + R} - \sqrt{a - R}}{\sqrt{a + R} + \sqrt{a - R}} \\ &= \frac{\sqrt{a + R} - \sqrt{a - R}}{\sqrt{a + R} + \sqrt{a - R}} \cdot \frac{\sqrt{a + R} - \sqrt{a - R}}{\sqrt{a + R} - \sqrt{a - R}} = \frac{a + R + a - R - 2\sqrt{a^2 - R^2}}{a + R - (a - R)} \\ &= \frac{a - \sqrt{a^2 - R^2}}{R} = \frac{a}{R} - \sqrt{\frac{a^2}{R^2} - 1}. \end{aligned}$$

Sätter man istället in $z = a + R$ så ger analoga räkningar att

$$r_2 = \frac{a}{R} + \sqrt{\frac{a^2}{R^2} - 1}.$$

Eftersom

$$\ln |w| = \ln \left| \frac{z + \sqrt{a^2 - R^2}}{z - \sqrt{a^2 - R^2}} \right| = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(x + \sqrt{a^2 - R^2})^2 + y^2}{(x - \sqrt{a^2 - R^2})^2 + y^2} \right),$$

så ger det tidigare härledda uttrycket för $g(u, v)$ att lösningen till ursprungsproblemet blir

$$g(x, y) = \frac{c_2 - c_1}{2 \ln(r_2/r_1)} \ln \left(\frac{(x + \sqrt{a^2 - R^2})^2 + y^2}{(x - \sqrt{a^2 - R^2})^2 + y^2} \right) + \frac{c_1 \ln r_2 - c_2 \ln r_1}{\ln(r_2/r_1)},$$

med r_1 och r_2 som ovan.

FÖRHOPPNINGSVIS har dessa exempel visat hur man i vissa enkla randvärdesproblem för lösningar till Laplaces ekvation med fördel kan använda sig av konforma avbildningar. Och flera exempel kommer att dyka upp i de tillämpade ämnena.

SLUT