KTH Matematik
Olle Stormark

Kontrollskrivning 1A

i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för ME, ht 2009.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Låt $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)$ vara ortsvektorn, och låt $\boldsymbol{F}$ vara ett godtyckligt vektorfält. Visa att
$$\operatorname{div}(\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{F}.$$

2. Beräkna flödesintegralen $\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS$ då $\boldsymbol{F} = (2y, -z, x^2)$, S är den del av den paraboliska cylindern $\{y^2 = 8x\}$ som ligger i den första oktanten och där begränsas av planen $\{y = 4\}$ samt $\{z = 6\}$, och enhetsnormalen $\hat{\boldsymbol{n}}$ har en positiv x-komponent.

3. Använd indexräkning för att visa att $\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$ för alla vektorfält $\boldsymbol{F}$.

Lycka till!
Olle.

KTH Matematik
Olle Stormark

Kontrollskrivning 1B

i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för ME, ht 2009.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Låt $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)$ vara ortsvektorn, och låt $\boldsymbol{\omega}$ vara en konstant vektor. Visa att
$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = 2\boldsymbol{\omega}.$$

2. Beräkna flödesintegralen $\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS$ då $\boldsymbol{F} = (6z, 2x+y, -x)$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+z^2 = 9,\ x \geq 0,\ z \geq 0,\ 0 \leq y \leq 8\}$ och $\hat{\boldsymbol{n}}$ har en positiv z-komponent.

3. Använd indexräkning för att visa att $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi = \mathbf{0}$ för alla funktioner ϕ.

Lycka till!
Olle.

KTH Matematik
Olle Stormark

Kontrollskrivning 2

i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för ME, ht 2009.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Visa att Stokes' sats gäller i fallet då $\boldsymbol{F} = (2x - y, -yz^2, -y^2z)$, $S =$ övre halvan av enhetssfären $= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ och $C = \partial S =$ randkurvan till S.

2. Inför *paraboliska cylinderkoordinater* u, v, z genom

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \\ y = uv, \\ z = z. \end{cases}$$

   (a) Härled skalfaktorerena h_u, h_v, h_z och enhetsvektorerna $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_z$.

   (b) Visa att $\{\boldsymbol{e}_u, \boldsymbol{e}_v, \boldsymbol{e}_z\}$ bildar ett ortonormerat högersystem – det vill säga, dessa enhetsvektorer är inbördes ortogonala och uppfyller ekvationen $\boldsymbol{e}_u \times \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{e}_z$.

   (c) Uttryck Lapaces ekvation $\Delta\phi = 0$ i dessa koordinater.
   Ledning: Enligt BETA är

$$\Delta\phi = \nabla^2\phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial \phi}{\partial u_i} \right)$$

3. Låt V vara ett sammanhängande område i $\mathbb{R}^3$ med randytan S, låt $\hat{\boldsymbol{n}}$ vara den utåtriktade enhetsnormalen till S och låt $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ vara ortsvektorn. Bestäm värdet av flödesintegralen

$$\iint_S \boldsymbol{r} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, dS.$$

Lycka till!
Olle.

KTH Matematik
Olle Stormark

Kontrollskrivning 3A

i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för ME, ht 2009.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Bestäm bilden av cirkeln $\{z \in \mathbb{C} \colon |z - 1/2| = 1/2\}$ under avbildningen $w = 1/z$.

2. (a) Låt $u(x,y) = \cos x\,(e^{-y} - e^{y})$. Använd CR-ekvationerna för att bestämma en funktion $v(x,y)$ som är sådan att $f = u + iv$ blir komplext deriverbar. (2p)

   (b) Framställ f som en funktion av $z = x + iy$ (snarare än som en funktion av x och y). (1p)

3. Om $w = f(z)$ så definieras inversen $z = f^{-1}(w)$ genom att man löser ut z som funktion av w. Visa:

$$w = f(z) = \cosh z = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z}) \Longrightarrow z = f^{-1}(w) = \log(w + \sqrt{w^2 - 1}).$$

Lycka till!
Olle.

KTH Matematik
Olle Stormark

Kontrollskrivning 3B

i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för ME, ht 2009.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Bestäm bilden av den räta linjen $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z = 1\}$ under avbildningen $w = 1/z$.

2. (a) Låt $u(x, y) = \cos x\,(e^y + e^{-y})$. Använd CR-ekvationerna för att bestämma en funktion $v(x, y)$ som är sådan att $f = u + iv$ blir komplext deriverbar. (2p)

   (b) Framställ f som en funktion av $z = x + iy$ (snarare än som en funktion av x och y). (1p)

3. Om $w = f(z)$ så definieras inversen $z = f^{-1}(w)$ genom att man löser ut z som funktion av w. Visa:

$$w = f(z) = \tanh z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \Longrightarrow z = f^{-1}(w) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+w}{1-w}\right).$$

Lycka till!
Olle.