KTH Matematik
Olle Stormark

SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner 7,5 hp, för ME ht 2009.

Ett *vektorfält* $\boldsymbol{F}$ är en vektorvärd funktion, som till varje punkt $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ i rummet associerar en vektor

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = (F_1(x_1, x_2, x_3), F_2(x_1, x_2, x_3), F_3(x_1, x_2, x_3)).$$

I *vektoranalysen* studerar man *derivator* och *integraler* av vektorfält. De grundläggande derivationsoperatorerna är

$$\begin{aligned} \text{grad}: \quad & \text{funktioner} \to \text{vektorfält} \\ & \phi(x_1, x_2, x_3) \mapsto (\partial\phi/\partial x_1, \partial\phi/\partial x_2, \partial\phi/\partial x_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{div}: \quad & \text{vektorfält} \to \text{funktioner} \\ & (F_1, F_2, F_3) \mapsto \partial F_1/\partial x_1 + \partial F_2/\partial x_2 + \partial F_3/\partial x_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rot}: \quad & \text{vektorfält} \to \text{vektorfält} \\ & (F_1, F_2, F_3) \mapsto \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right). \end{aligned}$$

Dessa uppträder till exempel i Maxwells ekvationer, som är grundläggande för den *elektromagnetiska fältteorien*:

$$\begin{cases} \text{div}\, \boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0, \\ \text{div}\, \boldsymbol{B} = 0, \\ \text{rot}\, \boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B}/\partial t, \\ \text{rot} \boldsymbol{B} = \mu_0\, \boldsymbol{i} + \mu_0 \epsilon_0\, \partial \boldsymbol{E}/\partial t, \end{cases}$$

där $\boldsymbol{E}$ = elektriska fältet, $\boldsymbol{B}$ = magnetiska fältet, ρ = laddningstätheten, $\boldsymbol{i}$ = strömtätheten och μ_0, ϵ_0 är vissa konstanter.

En intressant sammansättning av differentialoperatorerna ovan är *Laplaceoperatorn* $\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad}$:

$$\begin{aligned}\Delta: \quad &\text{funktioner} \to \text{funktioner}\\ \phi(x_1, x_2, x_3) &\mapsto \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k^2}.\end{aligned}$$

Funktioner ϕ som uppfyller Lapces ekvation $\Delta\phi = 0$ sägs vara *harmoniska.*

Dirichletproblemet

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 \text{ i ett område } \mathcal{D}, \\ \text{restriktionen av } \phi \text{ till } \mathcal{D}\text{:s rand är en given funktion,} \end{cases}$$

är av fundamental betydelse i den matematiska fysiken.

Integralkalylens fundamentalsats

$$\int_a^b \frac{dF}{dx}\, dx = F(b) - F(a)$$

har följande generaliseringar:

$$\textit{divergenssatsen} \qquad \iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dV = \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS,$$

där S = begränsningsytan av volymen V, dV = volymselementet, dS = ytelementet och $\boldsymbol{n}$ = den utåtriktade enhetsnormalen för ytan S, och

$$\textit{Stokes' sats} \qquad \int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r},$$

där C = randkurvan till ytstycket S.

I växelströmsteorien visar det sig att beräkningarna blir *mycket enklare* om man accepterar *komplexa frekvenser* ω, vilket gör att teorien för *komplexvärda funktioner av en komplex variabel*:

$$w = f(z), \text{ där } z = x + iy \text{ och } w = u + iv \text{ är komplexa variabler,}$$

blir relevant. En sådan funktion kan alternativt ses som en reell avbildning från xy-planet till uv-planet:

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y). \end{cases}$$

$f(z)$ sägs vara *analytisk* om derivatan $f'(z)$ finns. I så fall uppfyller u och v de så kallade *Cauchy-Riemann ekvationerna*:

$$\begin{cases} \partial u/\partial x = \partial v/\partial y, \\ \partial u/\partial y = -\partial v/\partial x, \end{cases}$$

från vilka det följer att u och v är *harmoniska*: $\Delta u = \Delta v = 0$.

I vår kurs ska vi först bekanta oss med de elementära funktionerna: e^z, $\log z$, $\sin z, \ldots$ och sedan lära oss hur man kan använda dessa för att lösa Dirichletproblem i planet.

Det primära syftet med denna kurs är att ge nödvändiga förkunskaper för ämnet *elektromagnetisk fältteori.*

Kursmål Efter genomgången kurs skall teknologerna kunna

vektoranalys

- redogöra för begreppen divergens, rotation och gradient, kunna beräkna divergensen och rotationen av vektorfält samt gradienten av funktioner
- förenkla och omforma vektoranalytiska uttryck med hjälp av nablakalkyl
- beräkna flödesintegraler över (i allmänhet krökta) ytor i rummet, givna i parameter- eller ekvationsform,
- redogöra för divergenssatsen och kunna använda den vid beräkning av integraler
- beräkna linjeintegraler i rummet och kunna avgöra när de är de är oberoende av integrationsvägen
- redogöra för Stokes' sats och kunna använda den i samband med beräkning av linje- och flödesintegraler
- avgöra när ett vektorfält har en skalär potential och kunna bestämma den i fall den finns
- avgöra när ett vektorfält har en vektorpotential och att i enklare fall kunna bestämma en sådan

- genomföra vektorsanalytiska beräkningar av ovanstående slag inte bara i cartesiska koordinater utan även i ortogonala krokloinjiga koordinater (särskilt cylinder- och sfäriska koordinater)

- redogöra för hur Lapaces och Poissons ekvationer uppkommer inom matematisk fysik samt kunna lösa sådana i enkla fall

komplexa funktioner

- kunna räkna obehindrat med de komplexa talen i cartesisk och polär framställning, kunna tolka relationer mellan komplexa tal geometriskt i enkla fall, kunna bestämma spegelpunkter med avseende på räta linjer och cirklar

- veta vad som menas med en analytisk funktion och kunna avgöra om en given funktion är analytisk eller ej, till exempel genom att kontrollera Cauchy-Riemann ekvationerna

- veta vad som menas med en konform avbildning

- veta vad som menas med en harmonisk funktion och kunna, till en given harmonisk funktion, bestämma en harmoniskt konjugerad funktion

- kunna redogöra för de elementära analytiska funktionerna, till exempel kunna definiera dem, beräkna deras derivator, utreda eventuella mångtydigheter samt bestämma naturliga definitionsområden

- veta vad som menas med en Möbiustransformation och kunna avgöra hur en given Möbiustransformation avbildar ett givet cirkelområde eller halvplan; och onvänt, givet två sådana områden kunna bestämma en Möbiustransformation som avbildar det ena på det andra

- i enkla fall kunna avgöra hur andra elementära funktioner avbildar olika områden, och omvänt, kunna hitta en analytisk funktion som utför en given avbildning

- kunna lösa vissa randvärdesproblem för Laplaces ekvation genom konform avbildning på *enkla* områden (till exempel halvplan och cirkelskivor), där det är lätt att hitta lösningar.

Kurslitteratur

- P.C. Matthews, *Vector Calculus*, Springer Undergraduate Mathematics Series, 1998. I kursen ingår kapitlen 1–6 samt avsnitten 8.1 och 8.2.
- Råde - Westergren, BETA, *Mathematics Handbook for Science and Engineering*, Studentlitteratur. Det är tillåtet att använda BETA vid KSar och tentor.

  Kapitel **11** samt avsnitten **1** och **5** i kapitel **14** ger en bra sammanfattning av kursen.
- *Laplaces och Poissons ekvationer*, kort PDF-fil på hemsidan.
- Exempelsamling i vektoranalys (PDF-fil på hemsidan).
- Olle S, *Komplexa funktioner* (PDF-fil på hemsidan). I kursen ingår hela kompendiet *utom* kapitel 8: $i\omega$-metoden.
- Olle S, *Exempelsamling i komplexa funktioner* (PDF-fil på hemsidan).

Matthews och BETA kan köpas i Studentkårens bokhandel.

Förkunskaper Linjär algebra samt en- och flervariabelsanalys. Dessutom krävs en god portion av fighting spirit.

Undervisningen ges i form av lektioner, innehållande både teori och problemlösning.

Lärare Olle Stormark (olles@math.kth.se); sitter i rum 3653 i Klocktornet, Lindstedtsvägen 25 KTH, och har telefonnumret 7907206.

Kurssekreterare Kerstin Engstrand (kerstin@kth.se), telefon 7906149. Kerstin har hand om kursregistrering, inrapportering av betyg, samt anmälan till tentor om *Mina Sidor* inte fungerar.

Kontrollskrivningar Det ges tre KS:ar, två på vektoranalysdelen, och en på komplexa funktioner. Godkända KS:ar tillgodoräknas på ME:s ordinarie tenta och första omtenta på så sätt att godkänt på KS i ($i = 1, 2$ eller 3) ger godkänt = 3 poäng på tentatal i.

Tentamensskrivningen omfattar cirka 8 tal, och man kan maximalt få 26 poäng. **Betygsgränser**:

- 24–26 p $\Longrightarrow$ A,

- 21–23 p $\Longrightarrow$ B,
- 18–20 p $\Longrightarrow$ C,
- 15–17 p $\Longrightarrow$ D,
- 12–14 p $\Longrightarrow$ E,
- 11 p $\Longrightarrow$ Fx $\Longrightarrow$ får komplettera,
- $\leq 10 \Longrightarrow$ F.

Ordinarie tentan ges torsdag 17:e december, klockan 14.00–19.00, preliminärt i KTH-salarna E52, E53.

Tentamensanmälan kan göras från och med den 9:e november till och med den 29:e november.

Klagomål på rättningen görs skriftligt på blanketter som tillhandahålles av matematikinstitutionens studentexpedition.

PRELIMINÄR KURSPLANERING

V = Vector Calculus, **EV** = Exempelsamling i vektoranalys, **K** = Kompendium i komplexa funktioner, **EK** = exempelsamling i komplexa funktioner. Observera att **V** innehåller *kompletta lösningar* till alla övningsexempel! Om inte annat sägs är dessa tal automatiskt *läxtal* !!!

Undervisningen ges i form av *lektioner*.

Lektion 1 mån 26/10 15–17 i C21: Inledning till kursen och snabb genomgång av kapitel 1 i **V**. Läxtal i **EV**: 1 och 3.

Lektion 2 tis 27/10 15-17 i C21: Linjeintegraler i rummet, avsnitten 2.1 och 2.2 i **V**. Läxtal i **EV**: 26, 30, 32.

Lektion 3 ons 28/10 10–12 i C21: Flödesintegraler och volymsintegraler, avsnitten 2.3 och 2.4 i **V**. Läxtal i **EV**: 33 och 34.

Lektion 4 ons 28/10 13–15 i 533: Gradienten, avsnitten 3.1 och 3.2 i **V**. Läxtal i **EV**: 13, 18, 22.

Lektion 5 tor 29/10 10–12 i C21: Divergens och rotation, avsnitten 3.3 och 3.4 i **V**. Läxtal i **EV**: 37, 38, 42.

Lektion 6 tor 29/10 13–15 i C21: Indexräkning, avsnitten 4.1–4.4 i **V**.

Lektion 7 mån 2/11 15–17 i C21: Grad, div och rot med indexräkning, avsnitten 4.5–4.7 i **V**. Läxtal i **EV**: 63, 64.

Lektion 8 tis 3/11 13–15 i C21: Sammanfattning av kapitel 4 i **V**. Läxtal i **EV**: 66, 70, 71.

Lektion 9 ons 4/11 10–12 i 439: Divergenssatsen, avsnitt 5.1 i **V**. Läxtal i **EV**: 72, 74, 80.

Lektion 10 ons 4/11 13–15 i 439: Stokes' sats, avsnitt 5.2 i **V**. Läxtal i **EV**: 77, 83, 86.

Lektion 11 tor 5/11 10–12 i Sal D: Sammanfattning av kapitel 5.

Lektion 12 tor 5/11 13-15 i 438: Repetition av kapitel 1–5.

Lektion 13 mån 9/11 15–17 i 439: **KS1** på kapitel 1–4.

Lektion 14 tis 10/11 13–15 i C21: Kroklinjiga koordinater, avsnitten 6.1 och 6.2 i **V**.

Lektion 15 ons 11/11 10–12 i C21: Cylindriska och sfäriska koordinater, avsnitten 6.3 och 6.4 i **V**. Läxtal i **EV**: 89, 95, 96.

Lektion 16 tor 12/11 10–12 i Sal D: Sammanfattning av kapitel 6.

Lektion 17 tor 12/11 13–15 i C21: Värmeledningsekvationen och lite grand om elektromagnetism, avsnitten 8.1 och början på 8.2 i **V**.

Lektion 18 mån 16/11 15–17 i 531: Fortsättning på elektromagentisk fältteori, avsnitt 8.2 i **V**.

Lektion 19 tis 17/11 13–15 i C21: Laplaces och Poissons ekvationer (PDF-fil på hemsidan). Läxtal i **EV**: 130 och 134.

Lektion 20 ons 18/11 10–12 i C21: Repetition och komplettering.

Lektion 21 tor 19/11 10–12 i Sal D: **KS2** på kapitlen 5, 6 och 8.

Lektion 22 tor 19/11 13–15 i C21: Komplexa tal, kapitel 1 i **K**. Läxtal i **EK**: 1(a), 2(a), 6(a), 6(d), 9(a).

Lektion 23 mån 23/11 15–17 i 439: Riemannsfären, kapitel 2 i **K**. Läxtal i **EK**: 12, 14.

Lektion 24 tis 24/11 13–15 i 532: Polynom och exponentialfunktionen, kapitel 3 i **K**. Läxtal i **EK**: 20(a), 20(b), 21(a).

Lektion 25 ons 25/11 10–12 i C21: Början på Cauchy-Riemann ekvationerna, kapitel 5 i **K**. Läxtal i **EK**: 16(a), 16(b).

Lektion 26 tor 26/11 10–12 i Sal D: Fortsättning. Läxtal i **EK**: 16(d).

Lektion 27 tor 26/11 13–15 i 533: Början på elementära funktioner, kapitel 6 i **K**. Läxtal i **EK**: 22, 25(a), 25(c).

Lektion 28 mån 30/11 15–17 i C21: Fortsättning. Läxtal i **EK**: 29, 31.

Lektion 29 tis 1/12 13–15 i C21: Flertydiga funktioner, kapitel 7 i **K**. Läxtal i **EK**: 32.

Lektion 30 ons 2/12 10–12 i 432: Laplaces ekvation och konforma avbildningar, kapitel 9 i **K**.

Lektion 31 ons 2/12 13–15 i 533: Möbiusfunktionen, kapitel 10 i **K**. Läxtal i **EK**: 39, 40, 43.

Lektion 32 tor 3/12 10–12 i 439: Konforma avbildningar, kapitel 11 i **K**. Läxtal i **EK**: 46, 48, 50.

Lektion 33 tor 3/12 13–15 i 439: **KS3** på kapitel 1–7.

Lektion 34 mån 7/12 15–17 i C21: Flera konforma avbildningar, kapitel 11 i **K**. Läxtal i **EK**: 52, 54.

Lektion 35 tis 8/12 13–15 i C21: Början på randvärdesproblem, kapitel 12 i **K**. Läxtal i **EK**: 55, 57.

Lektion 36 ons 9/12 13–16 i C21: Fortsättning. Läxtal i **EK**: 59, 61.

Lektion 37 tor 10/12 10–12 i Sal D: Repetition.

Tentamen tor 17/12 14–19, preliminärt i E52 och E53, KTH.