Institutionen för matematik
KTH

Efternamn, förnamn, personnummer, studiestatus:

Efternamn, förnamn, personnummer, studiestatus:

Efternamn, förnamn, personnummer, studiestatus:

Inlämningsuppgift.

SF1602 Diff o Int II, för .

INLÄMNINGSUPPGIFT, Taylors formel (MODUL 6)

Lös följande uppgifter avseende Taylors formel. Det är önskvärt att resultaten kontrolleras med programpaketet MAPLE. Parametrarna a, b, och c är de tre sista nollskilda siffrorna i personnumret hos person nr 3 ovan.

1. Skriv upp värdena på parametrarna a, b, och c.

2. Betrakta differentialekvationen (med begynnelsevärde)

$$y'(x) = ay(x), \qquad y(0) = b. \tag{1}$$

(a) Lös först differentialekvationen analytiskt och skriv upp svaret.

(b) Vi skall sedan försöka lösa ekvationen iterativt och få approximativa polynomlösningar. Det första steget är att skriva om differentialekvationen som en integralekvation:

$$y(x) = b + a\int_0^x y(t)\,dt. \tag{2}$$

Visa att integralekvationen (2) är ekvivalent med (1). Dvs om vi har en lösning till integralekvationen så löser den differentialekvationen med begynnelsevärde, och omvänt att varje lösning till differentialekvationen med begynnelsevärde också löser integralekvationen.

(c) Vi löser (2) iterativt genom att ansätta

$$y_0(x) = 0,$$

medan

$$y_{n+1}(x) = b + a\int_0^x y_n(t)\,dt.$$

Skriv nu upp de successiva approximativa lösningarna $y_n(x)$, för $n = 1, \ldots, 15$. Visa att $y_n(x)$ blir ett Taylorpolynom till den analytiska lösningen.

3. Betrakta den olinjära differentialekvationen (med begynnelsevrde)

$$y'(x) = [y(x)]^2, \qquad y(0) = c. \tag{3}$$

Vi gör nu på samma vis som tidigare, och skriver den på integralform

$$y(x) = c + \int_0^x [y(t)]^2 \, dt. \tag{4}$$

(a) Vi löser (4) iterativt genom att ansätta

$$y_0(x) = 0,$$

medan

$$y_{n+1}(x) = c + \int_0^x [y_n(t)]^2 \, dt.$$

Skriv nu upp de successiva approximativa lösningarna $y_n(x)$, för $n = 1, \ldots, 3$.

(b) Observera att du får förhållandevis stora uttryck efter ett tag. Ett sätt att komma ifrån detta problem är att sätta

$$y_{n+1,k}(x) = c + \int_0^x [y_{n,k}(t)]^2 \, dt \pmod{x^k},$$

där vi tolkar $\pmod{x^k}$ som att alla uttryck

$$x^k, x^{k+1}, x^{k+2}, \ldots,$$

ersätts med 0. Gör denna iteration för $k = 2, 3, \ldots, 10$, och sluta vid det hletal n då $y_{n+1,k}$ inte skiljer sig från $y_{n,k}$ (detta polynom kallar vi y_k).

(c) Med vägledning från (b), vad tror du blir den analytiska lösningen? Lös slutligen differentialekvationen analytiskt och jämför dess Taylorpolynom med dina framräknade iterativa polynom $y_k(x)$.