Tentamensskrivning, 2007-12-21, kl. 08.00–13.00.

SF1602 Diffint (envariabel), för F.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För att tillgodoräkna sig resultat från denna del krävs krävs minst 5 av 6 moduler godkända från Del 1. För betyg A krävs 28 poäng, för betyg B krävs 20 poäng, och för betyg C krävs 12 poäng. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING: DEL 2. LÖSNINGSFÖRSLAG

11. Vi betraktar funktionen

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

Rita grafen till funktionen, med indikation om var funktionen växer och var den avtar, eventuella asymptoter, och konvexitet-konkavitet samt eventuella inflexionspunkter. (5)

Funktionen har $x = 0$ som vertikal asymptot, eftersom vi delar med x och $e^{-0} = 1$. Dessutom har vi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 0,$$

vilket gör $y = 0$ till horisontell asymptot. Några fler asymptoter finns ej, eftersom exponentialfunktionen e^{-x} växer för snabbt då $x \to -\infty$.

Vi deriverar:

$$f'(x) = -\frac{x+1}{x^2}\, e^{-x}, \qquad x \neq 0.$$

Detta ger att $f'(x) > 0$ om $x < -1$, och $f'(x) < 0$ om $x > -1$ och $x \neq 0$. Funktionen är alltså strängt växande på intervallet $]-\infty, -1]$, och strängt avtagande på intervallen $[-1, 0[$ och $]0, +\infty[$. Vi deriverar nu en gång till:

$$f''(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3}\, e^{-x}.$$

Eftersom $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 \geq 1$ ser vi att $f''(x) < 0$ på intervallet $]-\infty, 0[$ samt att $f''(x) > 0$ på intervallet $]0, +\infty[$. Därför är $f(x)$ strängt konkav på $]-\infty, 0[$, och strängt konvex på $]0, +\infty[$. Inflexionspunkter saknas. P g a tekniska problem avstår vi från att rita upp grafen.

---

12. Betrakta den generaliserade integralen

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha}\, dx,$$

där α är en reell parameter. Avgör för vilka α som integralen konvergerar. (5)

Vi delar upp integrationen i två delar:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha}\,dx = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x^\alpha}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha}\,dx.$$

Eftersom $\frac{\pi}{4} \arctan x \leq \frac{\pi}{2}$ på $[1, +\infty$, kan vi göra jämförelsen

$$\frac{\pi}{4}\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha}\,dx \leq \frac{\pi}{2}\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Integranden är positiv, och jämförelsekriterier kan användas. Vi vet att integralen

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

konvergerar precis då $\alpha > 1$. Avseende integralen på $]0, 1]$, kan vi säga att

$$\frac{x}{2} \leq \arctan x \leq x, \qquad 0 < x \leq 1,$$

så att

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{x^\alpha}\,dx \leq \int_0^1 \frac{\arctan x}{x^\alpha}\,dx \leq \int_0^1 \frac{x}{x^\alpha}\,dx.$$

Integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-1}}\,dx$$

konvergerar precis då $\alpha < 2$. Detta innebär att vår integral konvergerar om och endast om $1 < \alpha < 2$.

---

13. Betrakta summan

$$I_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \dots + \frac{1}{n+n}.$$

Beräkna gränsvärdet av I_n då $n \to +\infty$. (5)

Vi skriver

$$I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}.$$

Detta gör att I_n blir en Riemannsumma (ev kan man ta bort första termen för att få det så) för integralen

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1 = \ln 2.$$

Vi får således $I_n \to \ln 2$ då $n \to +\infty$.

---

14. Beräkna integralen

$$\int_0^1 \arctan\sqrt{x}\,dx.$$

(5)

Vi gör variabelbytet $t = \sqrt{x}$, $dx = 2tdt$, och får

$$\int_0^1 \arctan \sqrt{x}\, dx = 2 \int_0^1 t \arctan t\, dt.$$

Därefter följer partiell integration:

$$2 \int_0^1 t \arctan t\, dt = \Big[t^2 \arctan t\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt.$$

Nu blir integrationen lätt:

$$\int_0^1 \arctan \sqrt{x}\, dx = \frac{\pi}{4} - 1 + \Big[\arctan t\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

---

15. Lös differentialekvationen

$$y'' + y = x^2 + xe^x$$

fullständigt. (5)

Vi löser först det homogena problemet

$$y'' + y = 0.$$

Motvarande karakteristiska ekvation blir

$$r^2 + 1 = 0,$$

med rötter

$$r = \pm i.$$

Den allmänna homogena lösningen kan skrivas

$$y_h = B_1\, e^{ix} + B_2\, e^{-ix} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Nu behöver vi bara en partikulärlösning y_p. Vi kollar att

$$y_p = x^2 - 2 + \frac{1}{2}\,(x-1)e^x$$

funkar. Vi får den allmänna lösningen

$$y = y_p + y_h = x^2 - 2 + \frac{1}{2}\,(x-1)e^x + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

---

16. En viss kemikalie löses upp i vatten med en hastighet som är proportionell mot produkten av den oupplösta mängden och differensen mellan koncentrationen i en mättad lösning och den aktuella koncentrationen. Man vet att i 100 ml mättad lösning är 50 g av kemikalien löst. Om 30 g av kemikalien rörs ned i 100 ml rent vatten så löses 10 g på 2 timmar. Hur mycket har lösts upp efter 5 timmar? (5)

Låt x beteckna mängden löst kemikalie, i gram. Koncentrationen blir då $x/100$, och mättad koncentration blir $50/100$. Vi ställer upp ekvationen

$$\frac{dx}{dt} = k(30-x)(50-x),$$

där tiden t mäts i timmar. Enligt variabelseparationsmetoden får vi

$$\int \frac{dx}{(30-x)(50-x)} = \int k\,dt,$$

med lösning

$$\ln \frac{50-x}{30-x} = k_1 t + C,$$

där k_1 är relaterad till k. Eftersom $x(0) = 0$ har vi

$$C = \ln \frac{50}{30} = \ln \frac{5}{3},$$

och eftersom $x(2) = 10$ blir

$$\ln \frac{50-10}{30-10} = \ln 2 = 2\,k_1 + C = 2\,k_1 + \ln \frac{5}{3},$$

dvs

$$k_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{6}{5}.$$

Lösningen har alltså formen

$$\ln \frac{50-x}{30-x} = \frac{t}{2} \ln \frac{6}{5} + \ln \frac{5}{3}.$$

Vid $t = 5$ blir därför

$$\ln \frac{50-x(5)}{30-x(5)} = \frac{5}{2} \ln \frac{6}{5} + \ln \frac{5}{3}.$$

Detta betyder att

$$\frac{50-x(5)}{30-x(5)} = \frac{5}{3} \frac{6^{5/2}}{5^{5/2}}.$$

Lite ekvationslösning ger nu att

$$x(5) = 150\, \frac{6^{5/2} - 5^{5/2}}{5 \cdot 6^{5/2} - 3 \cdot 5^{5/2}} \approx 18\,\mathrm{g}.$$

---

17. Bestäm värdet på den reella parametern β, så att gränvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\beta x^3) - \beta x^3 + x^9}{x^{15}}$$

existerar. Bestäm sedan även gränsvärdet. (5)

Enligt Maclaurins formel har vi

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + t^7 B(t),$$

där $B(t)$ är en begränsad funktion. Om vi stoppar in $t = \beta x^3$ får vi

$$\sin(\beta x^3) = \beta x^3 - \frac{\beta^3 x^9}{6} + \frac{\beta^5 x^{15}}{120} + \beta^7 x^{21} B(\beta x^3).$$

Därför är

$$\sin(\beta x^3) - \beta x^3 + x^9 = \left(1 - \frac{\beta^3}{6}\right) x^9 + \frac{\beta^5 x^{15}}{120} + \beta^7 x^{21} B(\beta x^3),$$

och vi ser att

$$\beta = 6^{1/3}$$

för att gränsvärdet ska existera. Vi får då

$$\frac{\sin(\beta x^3) - \beta x^3 + x^9}{x^1 5} = \frac{\beta^5}{120} + \beta^7 x^6 B(\beta x^3) \to \frac{\beta^5}{120} = \frac{6^{5/3}}{120}$$

då $x \to 0$.