Tentamensskrivning, 2007-12-21, kl. 08.00–13.00.

SF1602 Diffint (envariabel), för F.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För betyg E krävs minst 4 av 6 moduler godkända (Del 1), och för betyg D krävs 5 av 6 moduler (Del 1). För högre betyg krävs dessutom deltagande i Del 2. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING: DEL 1

1. [MODUL 1] Beräkna summan

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1+2^n+3^n+4^n}{5^n}.$$

Vi betraktar först summan

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+2^n+3^n+4^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

Enligt summaformeln för geometriska serier blir nu

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5}{3},$$

samt

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{5}{2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{4}{5}} = 5.$$

Alltså blir

$$x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+2^n+3^n+4^n}{5^n} = \frac{5}{4}+\frac{5}{3}+\frac{5}{2}+5 = \frac{125}{12}.$$

Summan av de två första termerna blir

$$1+1+1+1+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5} = 6.$$

Dessa måste subtraheras, så svaret blir

$$\frac{125}{12} - 6 = \frac{53}{12}.$$

---

2. [MODUL 2] Avgör hur många reella lösningar ekvationen

$$x^3 - 3x = C$$

har, beroende på värdet på konstanten C.

Vi betraktar funktionen

$$f(x) = x^3 - 3x.$$

Derivatan blir

$$f'(x) = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1).$$

Funktionen $f(x)$ blir strängt växande på intervallet $]-\infty, -1]$, strängt avtagande på $[-1, 1]$, och strängt växande på $[1, +\infty[$. I punkterna $x = -1$ (lokalt max) och $x = 1$ (lokalt min) har funktionen värdena $f(-1) = -1+3 = 2$ och $f(1) = 1-3 = -2$. Detta innebär att för $C = 2$ och för $C = -2$ har ekvationen två rötter. För $-2 < C < 2$ har ekvationen tre rötter, medan för $C < -2$ och för $C > 2$ har vi bara en rot.

---

3. [MODUL 3] Bestäm en primitiv funktion till funktionen

$$f(x) = (1 + x + x^2)\ \ln(x).$$

Via partiell integration ser man att

$$\int x^n \ln x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C.$$

Detta innebär att

$$\int (1 + x + x^2)\ \ln(x)\, dx = x\ \ln x - x + \frac{x^2}{2}\ \ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{3}\ \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

Ett val av C ger en speciell primitiv funktion.

---

4. [MODUL 4] Derivera funktionen

$$F(x) = \int_{-x^2}^{0} \cos(t^3)\, dt.$$

Vi inför hjälpfunktionen

$$G(y) = \int_0^y \cos(t^3)\, dt,$$

som har derivatan $G'(y) = \cos(y^3)$. Eftersom

$$F(x) = \int_{-x^2}^{0} \cos(t^3)\, dt = -\int_0^{-x^2} \cos(t^3)\, dt = -G(-x^2)$$

har vi enligt kedjeregeln

$$F'(x) = 2x\, G'(-x^2) = 2x \cos(-x^6).$$

---

5. [MODUL 5] Vi låter (det begränsade) området som begränsas av kurvan $y = x^2$ och linjen $y = 1$ rotera kring x-axeln. Bestäm rotationskroppens volym.

Varje rotationsskiva får arean

$$A(x) = \pi(1 - (x^2)^2) = \pi(1 - x^4).$$

Nu löper x inom intervallet $[-1, 1]$, och vi får volymen

$$V = \int_{-1}^{1} A(x)\, dx = \pi \int_{-1}^{1} (1 - x^4)\, dx = \frac{8\pi}{5}.$$

---

6. [MODUL 6] Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} (1 + \sin^2 x)^{6/x^2}.$$

TIPS: logaritmera.

Efter logaritmering får vi

$$\frac{6}{x^2} \ln(1 + \sin^2 x) = 6\, \frac{\ln(1 + \sin^2 x)}{\sin^2 x} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \to 6$$

då $x \to 0$ enligt standardgränsvärden. Man kan också använda Maclaurinutveckling. Svaret blir alltså e^6.