Tentamensskrivning, 2008-12-20, kl. 08.00–13.00.

SF1602 Diffint (envariabel), för F.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För att tillgodoräkna sig resultat från denna del krävs krävs minst 5 av 6 moduler godkända från Del 1. För betyg A krävs 28 poäng, för betyg B krävs 20 poäng, och för betyg C krävs 12 poäng. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING: DEL 2

11. Ett kärl innehåller en blandning av näringslösning och bakterier. Näring tillförs i konstant takt. Om $y(t)$ betecknar koncentrationen av bakterier, mätt i gram per liter, så styrs utvecklingen av ekvationen

$$y'(t) = \frac{1}{6}\, y(t)(5 - y(t)).$$

Tiden t mäts i minuter. Vid begynnelsetiden $t = 0$ har vi en bakteriekoncentration av 1 gram per liter. Vilken blir koncentationen efter 10 minuter? Uppnås någonsin koncentrationen 4.9 gram per liter? (5)

Ekvationen är separabel, och vi skriver den på formen

$$\frac{dy}{y(5-y)} = \frac{dt}{6}.$$

Lösningen blir på formen

$$y = \frac{5C\, e^{(5/6)t}}{1 + C\, e^{(5/6)t}}.$$

Om vi använder att $y(0) = 1$ ser vi att $C = 1/4$. Detta gör att vi kan skriva lösningen på formen

$$y = \frac{5}{1 + 4\, e^{-(5/6)t}}.$$

Stoppar vi in $t = 10$ får vi den sökta koncentrationen. Vi ser också att koncentrationen går mot 5 allteftersom tiden fortskrider. Av den anledningen måste värdet 4.9 uppnås vid något tillfälle.

---

12. Visa att

$$\ln 3 \le \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2}{k^2-1} \le \frac{2}{3} + \ln 3.$$

(5)

Summan är teleskoperande (en massa termer tar ut varandra) och vi finner att

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2}{k^2-1} = \frac{3}{2}.$$

Olikheterna är en omedelbar konsekvens härav. Alternativt kan man använda att funktionen $f(x) = 2/(x^2-1)$ är avtagande, och de integraluppskattningar som kan fås för

V.g. vänd!

summor av typen

$$\sum_{k=2}^{N} f(k).$$

---

13. Från en ort Alvestad går en motorväg norrut till en ort Benhammar belägen 40 km från Alvestad. En sovstad Vesjön växer upp 4 km rakt öster om motorvägen, mer precist rakt österut från en punkt påmotorvägen belägen 24 km norr om Alvestad och 16 km söder om Benhammar. En trafikundersökning visar att invånarna i Vesjön besöker Alvestad dubbelt så ofta som Benhammar. Hur ska en anslutningsväg från Vesjön till motorvägen byggas för att invånarnas totala bensinförbrukning vid färd till Alvestad och Benhammar ska bli så liten som möjligt. (5)

Låt P vara den sökta förgreningspunkten längs med motorvägen frå Alvestad till Benhammar. Låt sedan x vara avståndet från punkten som ligger 24 km norr om Alvestad till punkten P (i riktning mot Alvestad). Vi finner att uttrycket

$$2\big(24 - x + \sqrt{16 + x^2}\big) + 16 + x + \sqrt{16 + x^2}$$

skall minimeras. Ett studium av derivatan ger vid handen att minimum inträffar för $x = \sqrt{2}$. Förgreningspunkten P skall alltså förläggas $24 - \sqrt{2}$ km norr om Alvestad.

---

14. En mycket stor tank fylls på med vätska i en takt av $\arctan\sqrt{t}$ liter per minut, där tiden t mäts i minuter. Från början är tanken helt tom. Hur många liter vätska innehåller tanken efter T minuter? (5)

Antalet liter vätska ges av

$$\int_0^T \arctan\sqrt{t}\,dt.$$

Lite partiell integration och variabelsubstitution ger svaret

$$\int_0^T \arctan\sqrt{t}\,dt = (T+1)\arctan\sqrt{T} - \sqrt{T}.$$

---

15. Lös följande differentialekvation fullständigt:

$$y'' + y' + y = x^3.$$

(5)

Den homogena ekvationen har karakteristisk ekvation

$$r^2 + r + 1 = 0,$$

med rötter

$$r = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Det ger den homogena lösningen

$$y_h = e^{-x/2}\Big(A\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + B\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\Big),$$

där A, B är konstanter. En partikulärlösning är polynomiell, och ges av

$$y_p = x^3 - 3x^2 + 6,$$

så att den allmänna lösningen ges av

$$y = y_p + y_h = x^3 - 3x^2 + 6 + e^{-x/2}\Big(A\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + B\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\Big).$$

---

16. Bestäm ekvationer för tangent och normal till kurvan $x^2 + y^4 = 17$ i punkten $(1, -2)$. (5)

Implicit derivering ger

$$2x\,dx + 4y^3\,dy = 0.$$

Vi stoppar sedan in $x = 1, y = -2$ och får

$$2\,dx - 32\,dy = 0.$$

Derivatan i punkten blir alltså

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}.$$

Motsvarande normal har lutningen -16. Vi får ekvationen

$$(x-1) - 16(y+2) = 0$$

för tangenten, och ekvationen

$$16(x-1) + (y+2) = 0$$

för normalen.

---

17. Bestäm en kontinuerlig funktion f på hela reella linjen så att

$$f'(x) = n, \qquad n < x < n+1,$$

för alla heltal n. Dessutom skall $f(0) = 0$ gälla. Är funktionen entydigt bestämd?

(5)

V.g. vänd!

Vi ser att på varje intervall $]n, n-1[$ så måste vi ha att

$$f(x) = nx + C_n, \qquad \text{då } n < x < n+1,$$

där C_n är en konstant som beror av heltalet n. Speciellt gäller $f(0) = 0$, och kontinuiteten kräver alltså att $C_0 = 0$. Kontinuitet i heltalspunkterna $x = n+1$ ger att

$$n(n+1) + C_n = (n+1)(n+1) + C_{n+1}.$$

Alla konstanterna C_n kan nu bestämmas. Detta innebär att funktionen är entydigt bestämd. Vi avstår här från att beskriva grafen.