Tentamensskrivning, 2008-12-20, kl. 08.00–13.00.

SF1602 Diffint (envariabel), för F.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För betyg E krävs minst 4 av 6 moduler godkända (Del 1), och för betyg D krävs 5 av 6 moduler (Del 1). För högre betyg krävs dessutom deltagande i Del 2. Lösningarna skall motiveras väl!

LÖSNINGSFÖRSLAG TENTAMENSSKRIVNING: DEL 1

1. [MODUL 1] Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(2x) + 2\sin x}{x + 3x^2}.$$

Man kan lösa uppgiften med standardgränsvärde, Taylorutveckling, eller l'Hospitals formel. Svaret blir 3. Ett fel många gjort är att de tillämpat l'Hospitals regel flera gånger, och glömt att kolla att uttrycket är på formen [0/0], vilket är en förutsättning för att få använda l'Hospitals regel.

---

2. [MODUL 2] Låt $f(x) = x^2\, e^{-2x}$. Bestäm samtliga lokala extrempunkter till funktionen och skissa kurvan i stora drag.

Derivering ger

$$f'(x) = 2x\, e^{-2x} - x^2(-2)e^{-2x} = 2x(1-x)\, e^{-2x},$$

vilket blir lika med noll precis då $x = 0$ och $x = 1$. Vi ser av ett teckenstudium på derivatan att $f(x)$ har ett lokalt minimum (faktiskt globalt) i $x = 0$ och ett lokalt maximum i $x = 1$. Dessutom ser vi direkt av uttrycket att $f(0) = 0$ och $f(x) > 0$ för $x \neq 0$, samt att $f(x) \to +\infty$ då $x \to -\infty$, och $f(x) \to 0$ då $x \to +\infty$. Vi avstår här från att rita kurvan.

---

3. [MODUL 3] Bestäm en primitiv funktion till funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}.$$

En primitiv funktion ges av

$$F(x) = -\frac{1}{\ln x}.$$

V.g. vänd!

4. [MODUL 4] Derivera funktionen

$$F(x) = \int_0^{x^{1/3}} \frac{\sin(t^3)}{t^3}\, dt.$$

Kedjeregeln och integralkalkylens huvudsats tillsammans ger svaret

$$F'(x) = \frac{\sin x}{3x^{5/3}}.$$

---

5. [MODUL 5] Vi betraktar kurvan $y = x^2/2$ då $0 \leq x \leq 1$. Bestäm kurvans längd.

Kurvlängden ges i detta fall av uttrycket

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx.$$

En primitiv funktion till $2\sqrt{1+x^2}$ är

$$x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right),$$

vilket ger att

$$L = \frac{1}{2}\Big(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})\Big).$$

---

6. [MODUL 6] Bestäm Maclaurin-polynomet (Taylorutveckling vid origo alltså) av grad 2 till funktionen $f(x) = \sqrt{x + 100}$. Avgör sedan om det är möjligt att beräkna ett närmevärde med tre korrekta decimaler till $\sqrt{104}$ med hjälp av detta Maclaurin-polynom. Om det är möjligt, gör det.

Vi vet att

$$\sqrt{100 + x} = 10\sqrt{1 + \frac{x}{100}},$$

och enligt Taylors formel har vi

$$\sqrt{1 + \frac{x}{100}} = \Big(1 + \frac{x}{100}\Big)^{1/2} = 1 + \frac{1/2}{1!}\,\frac{x}{100} + \frac{(1/2)(-1/2)}{2!}\,\Big(\frac{x}{100}\Big)^2 + R_3\Big(\frac{x}{100}\Big),$$

där resttermen ges av

$$R_3\Big(\frac{x}{100}\Big) = \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{3!}\,\Big(1 + \frac{\theta x}{100}\Big)^{-5/2}\Big(\frac{x}{100}\Big)^3,$$

för något tal θ med $0 < \theta < 1$. Vi uppskattar att för $x = 4$ så får vi

$$R_3\Big(\frac{4}{100}\Big) < 4 \cdot 10^{-6}.$$

Detta ger

$$\sqrt{104} = 10\sqrt{1 + \frac{4}{100}} = 10 + \frac{2}{10} - \frac{2}{1000} + 10\, R_3\Big(\frac{4}{100}\Big),$$

där resttermen tillåter oss att ha tre (t o m fyra) korrekta decimaler om vi eliminerar den. Vi får således

$$\sqrt{104} \approx 10.198.$$