

Tentamensskrivning, 2010-12-17, kl. 08.00–13.00.

SF1602 Diffint (envariabel), för F.

Hjälpmedel: penna, papper, suddgummi.

För att tillgodoräkna sig resultat från denna del krävs minst 5 av 6 moduler godkända från Del 1. För betyg A krävs 28 poäng, för betyg B krävs 20 poäng, och för betyg C krävs 12 poäng. Lösningarna skall motiveras väl!

LÖSNINGSFÖRSLAG TENTAMENSSKRIVNING: DEL 2

11. I en punkt på kurvan $y = e^{-x}$, $x \geq 0$, dras en tangent till kurvan. Koordinataxlarna bildar tillsammans med tangenten en triangel. Vilken är den största area en sådan triangel kan ha? (5)

Låt a vara punkten genom vilken tangenten dras. Ekvationen för tangenten blir då

$$y - e^{-a} = -e^{-a}(x - a),$$

och triangelarean A blir

$$A = \frac{1}{2}(1 + a)^2 e^{-a}.$$

Här är givet att $a \geq 0$. Optimering ger maximum i $a = 1$, och maximala arean blir $2/e$.

12. Beräkna integralen

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x+1}{x^4+x^2} dx. \quad (5)$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{x+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{x+1}{x^2+1}.$$

Svaret blir efter lite uträkningar

$$\frac{1}{2} \ln(3/2) - \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 - \frac{\pi}{12}.$$

13. Bestäm Maclaurin-polynomet (Taylorutveckling vid origo alltså) av grad 499 till funktionen $f(x) = \sin(x^{100})$. Beskriv även resttermen på någon av standard-formerna. Vad blir alltså $f^{(n)}(0)$ för $n = 0, \dots, 499$? (5)

Eftersom

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} \cos(\theta t)$$

för något θ , $0 < \theta < 1$ (Lagrange-form på resttermen!), så får vi att

$$f(x) = \sin(x^{100}) = x^{100} - \frac{x^{300}}{6} + \frac{x^{500}}{120} \cos(\theta x^{100}).$$

Eftersom resttermen nu är av typen x^{500} gånger en begränsad funktion, ger entydighets-satsen för Taylorutvecklingar att vi har fått fram Taylorutvecklingen till $f(x)$ upp till grad 499. Speciellt blir $f^{(n)}(0) = 0$ utom då n är delbart med 100, och $f^{(100)}(0) = 100!$, $f^{(300)}(0) = -300!/6$.

14. En kula slår med hastigheten v_0 in i en mjuk vägg av ett material, som kan antas ge kulan en retardation som är proportionell mot hastigheten. Sök sambandet mellan hastigheten v_0 , väggens tjocklek, b och proportionalitetskonstanten k om kulan nätt och jämnt ska kunna tränga genom väggen. (5)

Svaret är sambandet $v_0 = bk$.

15. Vatten rinner med konstant flöde ur en kran. Det är alltså utsatt för fritt fall, och man ser att hastigheten v och fallhöjden y av en vattenmolekyl ges av

$$v^2 = v_0^2 + 2gy.$$

Här är v_0 utloppshastigheten vid kranen, och g är tyngdkraftsaccelerationen. Kranöppningen är cirkulär, och vi antar att vattenstrålens tvärsnitt är cirkulärt (och centrerat runt axeln lodrätt ned från kranens mitt). Bestäm formeln som beskriver vattenstrålens utseende. M a o, bestäm sambandet $r = f(y)$ mellan radien r och fallhöjden y . (5)

Genom varje horisontellt tvärsnitt måste flödet vara lika. Detta ger sambandet

$$r = r_0(1 + 2gy/v_0^2)^{-1/4},$$

där r_0 är kranens radie.

16. Bestäm ekvationer för tangent och normal till kurvan $(x-1)^2 + (y+1)^3 = 9$ i punkten $(2, 1)$. (5)
-

Implicit derivering av ekvationen $(x-1)^2 + (y+1)^3 = 9$ ger att $2(x-1)dx + 3(y+1)^2dy = 0$. Stoppar vi in punkten $(2, 1)$ blir sambandet $2dx + 12dy = 0$, dvs $dx + 6dy = 0$. Ekvationen för tangenten blir härur

$$(x-2) + 6(y-1) = 0.$$

Ekvationen för normalen blir istället

$$6(x-2) - (y-1) = 0.$$

17. Finn den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' + 2y' + y = x^n e^{-x},$$

där n är ett positivt heltal.

(5)

Man finner att den allmänna homogena lösningen blir $y_h = (C_1x + C_2)e^{-x}$, eftersom den karakteristiska ekvationen har dubbelrot i $r = -1$. En partikulärlösning blir

$$y_p = \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} e^{-x},$$

så den allmänna lösningen till DE blir

$$y = y_p + y_h = \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} e^{-x} + (C_1x + C_2)e^{-x},$$

där C_1, C_2 är två fria konstanter.