Tentamensskrivning, 2010-12-17, kl. 08.00–13.00.

SF1602 Diffint (envariabel), för F.

Hjälpmedel: penna, papper, suddgummi.

För betyg E krävs minst 4 av 6 moduler godkända (Del 1), och för betyg D krävs 5 av 6 moduler (Del 1). För högre betyg, se Del 2. Lösningarna skall motiveras väl!

LÖSNINGSFÖRSLAG TENTAMENSSKRIVNING: DEL 1

1. [MODUL 1] Låt f och g vara funktionerna

$$f(x) = e^{3x}$$

och

$$g(x) = \sqrt{1+x},$$

där definitionsmängderna är de naturliga (så att vi får reellvärda funktioner). Bestäm med angivande av definitionsmängd (a) inversfunktionerna f^{-1} och g^{-1}, (b) alla möjliga sammansättningar av två av funktionerna f, f^{-1}, g, g^{-1}.

Vi får att $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\ln x$ med definitionsmängd $]0, +\infty[$, och $g^{-1}(x) = x^2 - 1$ med definitionsmängd $[0, +\infty[$. Nu har vi t ex $f \circ g(x) = e^{3\sqrt{x+1}}$. Kombinationerna blir många och därför skriver vi inte upp alla här.

---

2. [MODUL 2] Undersök vilka av följande implikationer som sanna. Giltiga implikationer ska motiveras med hänvisning till lämplig sats; för ogiltiga implikationer ska motivering ges i form av motexempel.

(i) f kontinuerlig $\Longrightarrow$ f deriverbar,

(ii) f deriverbar $\Longrightarrow$ f kontinuerlig,

(iii) f deriverbar $\Longrightarrow$ f' kontinuerlig,

(i) är falsk, (ii) sann enligt sats i läroboken, och (iii) är falsk. Vi ger inga motexempel här eftersom det kan göras på olika sätt.

---

3. [MODUL 3] Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = \ln|x|$, $x \neq 0$.

Den allmänna primitiva funktionen blir $x\ln|x| - x + C$, där konstanten C kan vara olika för $x > 0$ och $x < 0$.

V.g. vänd!

4. [MODUL 4] Beskriv utsagan i analysens (integralkalkylens) huvudsats. Beskriv sedan hur denna används för att få fram instopppningssatsen. Illustrera analysens huvudsats samt instoppningssatsen med klargörande exempel.

Se läroboken, avsnitt 6.4.

---

5. [MODUL 5] Vi betraktar området som definieras av $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$, där $0 \leq x \leq 1$. Vi låter sedan området rotera (i rummet) kring x-axeln. Bestäm den därvid uppkomna kroppens volym.

Enligt skivformeln blir volymen

$$\int_0^1 (x - x^4)dx = \frac{3\pi}{10}.$$

---

6. [MODUL 6] Vi vill approximera $17^{1/4}$ med följande metod. Vi betraktar funktionen $f(x) = (16 + x)^{1/4}$. Vi Maclaurinutvecklar $f(x)$ upp till och med grad 3. Skriv upp Taylorpolynomet av grad 3 med tillhörande restterm. Uppskatta dessutom resttermen, och tillämpa resultatet på $17^{1/4}$. Hur bra blir approximationen?

Maclaurinpolynomet blir

$$p(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{6} f'''(0),$$

och

$$f'(x) = \frac{1}{4}(16 + x)^{-3/4}, \quad f''(x) = -\frac{3}{16}(16 + x)^{-7/4}, \quad f'''(x) = \frac{21}{64}(16 + x)^{-11/4},$$

så att

$$f(0) = 2, \quad f'(0) = \frac{1}{32}, \quad f''(0) = -\frac{3}{2048}, \quad f'''(0) = \frac{21}{2^{17}}.$$

Resstermen på Lagrangeform är

$$\frac{x^4}{24} f^{(4)}(\theta x) = -\frac{231}{256} x^4 (16 + \theta x)^{-15/4},$$

där $0 < \theta < 1$, så att enligt Taylors formel blir

$$(16 + x)^{1/4} = 2 + \frac{1}{32}x - \frac{3}{4096}x^2 + \frac{7}{2^{18}}x^3 - \frac{77}{2^{11}}x^4(16 + \theta x)^{-15/4}.$$

Speciellt med $x = 1$:

$$17^{1/4} = 2 + \frac{1}{32} - \frac{3}{4096} + \frac{7}{2^{18}} - \frac{77}{2^{11}}(16 + \theta)^{-15/4}.$$

Dessutom vet vi att

$$0 < \frac{77}{2^{11}}(16 + \theta)^{-15/4} < \frac{231}{256} 16^{-15/4} = \frac{77}{2^{11}} 16^{-15/4} = \frac{77}{2^{26}},$$

så approximationen ger ett väldigt litet fel!