

# F12: Primitiva funktioner. Partialbråksuppdelning.

7 oktober 2009

**DEFINITION:** En funktion  $F(x)$  är **primitiv** till  $f(x)$  på ett intervall  $I$  om  $F'(x) = f(x)$  på  $I$ .

**NOTATION:** Vi skriver

$$\int f(x) dx$$

för att beteckna en godtycklig primitiv funktion till  $f(x)$  på ett tänkt intervall.

**EXEMPEL:** Vi finner att

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,$$

där  $C$  är en godtycklig konstant ( $\alpha \neq -1$ ). Dessutom gäller t ex ( $\alpha \neq 0$ )

$$\int e^{\alpha x} dx = \alpha^{-1} e^{\alpha x} + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

En användbar regel:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C.$$

## Teknik: partiell integration

Det är i allmänhet en svår uppgift att fiska fram en primitiv funktion till en given funktion. Några allmänna tekniker finns dock till vår hjälp.

**PARTIELL INTEGRATION:** Om  $F(x)$  är en primitiv funktion till  $f(x)$ , så gäller att

$$\int f(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx.$$

Partiell integrations-formeln följer ur produktregeln för derivatan.

**EXEMPEL:** Beräkna

$$\int xe^x dx, \quad \int \ln x dx.$$

**VARIABELSUBSTITUTION:** Om  $f$  har en primitiv funktion  $F$  och  $g$  är deriverbar, så gäller att

$$\int f(g(t))g'(t) dt = F(g(t)) + C.$$

Denna regel för integration följer ur kedjeregeln för derivatan.

**EXEMPEL:** Bestäm

$$\int \sqrt{1-x^2} dx$$

med hjälp av variabelbytet  $x = \sin t$ .

# Rationella funktioner: partialbråksuppdelning

Antag att vi vill finna en primitiv funktion till  $f(x)$ , om  $f$  är rationell, dvs

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)},$$

där  $g$  och  $h$  är polynom. Vi skriver först med hjälp av polynomdivision

$$f(x) = q(x) + \frac{r(x)}{h(x)},$$

där  $q$  och  $r$  är polynom, och  $r$  har grad  $r < \text{grad } h$ . Vi måste nu betrakta kvoten  $r/h$ .

**STEG 1: FAKTORISERA NÄMNAREN:** Vi faktoriserar nämnaren (vi kan anta att högstgradskoefficienten är 1):

$$h(x) = (x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n),$$

där  $n = \text{grad } h$  samt  $z_1, \dots, z_n$  är  $h$ :s alla komplexa rötter. Vissa av dessa rötter kan sammanfalla. Dessutom – eftersom  $h$  antas vara ett reellt polynom – är rötterna antingen reella eller är komplexkonjugerade par.

## Rationella funktioner: partialbråksuppdelning (3)

**STEG 2:** Vi hoppas nu att

$$\frac{r(x)}{h(x)} = \frac{c_1}{x - z_1} + \dots + \frac{c_n}{x - z_n},$$

där konstanterna  $c_1, \dots, c_n$  kan vara komplexa. Om alla rötterna  $z_1, \dots, z_n$  är olika är detta sant. Om vissa av rötterna sammanfaller, måste vi ta till nya termer. T ex om  $z_1$  förekommer dubbelt måste vi lägga till en term av typen

$$\frac{d_1}{(x - z_1)^2}.$$



**EXEMPEL:** Partialbråksuppdelning

$$\frac{x+1}{(x+2)(x+3)}, \quad \frac{2x+5}{(x+2)^2(x+3)}, \quad \frac{x+5}{x^2(x^2+1)}.$$

Låt

$$I_n(x) = \int \frac{dx}{(x^2 + a)^n}.$$

Då visar man med partiell integration att

$$I_n(x) = \frac{x}{(x^2 + a)^n} + 2nI_n(x) - 2anI_{n+1}(x).$$

$I_1(x)$  är lätt att få fram; de andra kommer iterativt ur ovanstående.