Cayley-Hamiltons sats

Låt V vara ett vektorrum med $\dim(V) = n$, och låt $T : V \to V$ vara en linjär avbilding. Et egenvärde λ till T definierar ett delrum $E_\lambda \subseteq V$ med egenskap att $T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ för alla $v \in E_\lambda$. Man kan säga att om $\vec{v}$ är en egenvektor till λ då är

$$T(Span(\vec{v})) \subset Span(\vec{v}).$$

Vi kommer att se att $Span(\vec{v})$ är ett exempel av en typ av delrum som kallas *T-tinvariant delrum*.

Corollary 0.1. *Låt V vara ett vektorrum av $\dim(V) = n$, och låt $T : V \to V$ vara en linjär avbilding. Ett delrum $W \subset V$ sägs vara T-invariant om*

$$T(W) \subseteq W, \text{ d.v.s } T(\vec{v}) \in W \text{ för alla } v \in W.$$

Exempel 0.2. **(a)** $\{\vec{0}\}, V, Im(T), Ker(T)$ är exempel av invariant delrum.

(b) Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara avbildningen definierad av $T(x,y,z) = (x+y, y+z, 0)$. Man ser att xy-planet $\{(x,y,z), z = 0\}$ och x-axeln $\{(x,y,z), y = z = 0\}$ är T-invariant delrum.

Observera att om $W \subseteq V$ är T-invariant då är $Im(T_W) \subseteq W$. I detta fal kan man betrakta T som funktion från W till W. Vi kommer att amvända betekningen

$$T_W : W \to W$$

Sats 0.3. *Låt $W \subseteq V$ vara en T-invariant delrum och betrakta $T_W : W \to W$. Då gäller att det karakterstiskpolynom av T_W, $p_{T_W}(\lambda)$, delar det karakterstiskpolynom av T, $p_T(\lambda)$.*

Proof. Let $\{\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_k\}$ vara en bas till W. Vii kan förlänga den till en bas till V, $B = \{\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_k, \vec{v}_{k+1} \cdots \vec{v}_n\}$. Notice that

$$[T]_B = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$$

där $A_1, A_2 \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$. Det följer att:

$$p_T(\lambda) = det \begin{pmatrix} A_1 - \lambda I_k & A_2 \\ 0 & A_3 - \lambda I_{n-k} \end{pmatrix} = p_{T_W}(\lambda) det(A_3 - \lambda I_{n-k}).$$

□

Sats 0.4. *Låt V vara ett vektorrum av $\dim(V) = n$ och låt $T : V \to V$ vara en linjär avbilding. Låt $W = Span\{\vec{v}, T(\vec{v}), T^2(\vec{v}), T^3(\vec{v}) \dots\}$ för några $\vec{0} \neq \vec{v} \in V$ och låt $\dim(W) = k$. Då gäller att:*

(a) *W är det minsta T-invariant delrum som innehåller $\vec{v}$.*

(b) *$\{\vec{v}, T(\vec{v}), T^2(\vec{v}), \dots, T^{k-1}(\vec{v})\}$[1] utgör en bas till W.*

(c) *Om $a_0\vec{v} + a_1 T(\vec{v}) + \dots + a_{k-1} T^{k-1}(\vec{v}) + T^k(\vec{v}) = 0$ då är*

$$p_{T_W}(\lambda) = (-1)^k (a_0 + a_1\lambda + \dots + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \lambda^k).$$

Proof. **(a)** Uppgift.

[1] $T^r = T \circ T \circ \cdots \circ T$ r gånger,

(b) Eftersom $\vec{v} \neq \vec{0}$, är $\{\vec{v}\}$ linjärt oberoende. Antar att j är det högsta heltal sådant att $B = \{\vec{v}, T(\vec{v}), T^2(\vec{v}), \ldots, T^{j-1}(\vec{v})\}$ är linjärt oberoende. Notera att $1 \leqslant j \leqslant k$. Vektorerna i B utgör en bas till $Z = Span(\vec{v}, T(\vec{v}), T^2(\vec{v}), \ldots, T^{j-1}(\vec{v})) \subseteq W$. Dessutom är $T^j(\vec{v}) \in Z$ för att vektorerna $\{\vec{v}, T(\vec{v}), T^2(\vec{v}), \ldots, T^{j-1}(\vec{v}), T^j(\vec{v})\}$ är linjärt beroende.

Låt $\vec{w} \in Z$, då finns det $c_1 \ldots c_{j-1} \in \mathbb{R}$ sådana att:

$$c_i\vec{v} + c_1T(\vec{v}) + c_2T^2(\vec{v}) + \ldots + c_{j-1}T^{j-1}(\vec{v}) = \vec{w}.$$

Då gäller att:

$$T(\vec{w}) = c_iT(\vec{v}) + c_1T^2(\vec{v}) + c_2T^3(\vec{v}) + \ldots + c_{j-1}T^j(\vec{v}) \in Z.$$

Det följer att Z är ett T-invariant delrum som innehåller $\vec{v}$ och då är $W \subseteq Z$, enligt (a). Detta visar att $Z = W$ och visar (b).

(c) Betrakta basen B från (b) och låt

$$a_0\vec{v}_i + a_1T(\vec{v}_i) + \ldots + a_{k-1}T^{k-1}(\vec{v}_i) + T^k(\vec{v}_i) = 0$$

Observera att:

$$[T_W]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ . & . & & . & . \\ . & . & & . & . \\ . & . & & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$

som har karakteristiskpolinom:

$$p_{T_W}(\lambda) = (-1)^k(a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \lambda^k).$$

□

Sats 0.5. *(CAYLEY-HAMILTON) Låt V vara ett vektor rum av $\dim(V) = n$, och låt $T : V \to V$ vara en linjär avbilding. Då satysfierar T det karakteristiska polynomet $P_T(\lambda)$. Detta betyder att om $P_T(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_t\lambda^t$ då är*

$$a_0I + a_1T + \ldots + a_tT^t = 0, \textit{ d.v.s den noll-avbildning}.$$

Detta betyder att $(a_0I + a_1T + \ldots + a_tT^t)(\vec{v}) = \vec{0}$ för alla $\vec{v} \in V$.

Proof. Om $\vec{v} = \vec{0}$ då är $(a_0 + a_1T + \ldots + a_tT^t)(\vec{v}) = \vec{0}$. Låt $\vec{v} \neq \vec{0}$. Låt W vara den minsta invariant delrum som innehåller $\vec{v}$. Antag att $\dim(W) = k$. Då finns det $c_0, \ldots, c_{k-1}$ sådana att: $T^k(\vec{v}) = -c_0\vec{v} - \ldots - c_{k-1}T^{k-1}(\vec{v})$. Sats 0.4 (b) ger att

$$p_{T_W}(\lambda) = (-1)^k(c_0 + \ldots + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \lambda^k).$$

Detta betyder att:

$$p_{T_W}(T(\vec{v})) = (-1)^k(c_0I_k + \ldots + c_{k-1}T^{k-1} + T^k)(\vec{v}) = \vec{0}.$$

Enligt Sats 0.3 delar $p_{T_W}(\lambda)$ polynomet $p_T(\lambda)$, d.v.s:

$$p_T(\lambda) = g(\lambda)p_{T_W}(\lambda)$$

och då

$$p_T(T(\vec{v})) = g(T(\vec{v}))p_{T_W}(T(\vec{v})) = g(T(\vec{v}))\vec{0} = \vec{0}.$$

$\square$

Exempel 0.6. Betrakta $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x,y) = (x+2y, -2x+y)$. Matrisen till T med avseende till den standardbasen är:

$$[T]_B = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Det karakterstiskpolynom är $P_T(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$ och då säger Cayley-Hamilton satsen att:

$$P_T(A) = A^2 - 2A + 5I_2 = 0.$$