Några extra uppgifter, vecka 41

(1) Vilka av följande delmängder utgör ett delrum? Motivera svaret!

(a) $W = \{\text{övertriangulära matriser}\} \subset M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
Om $A = (a_ij), B = (b_ij) \in W$ då är $a_ij = b_ij = 0$ fr $i > j$. Det följet att $A + B = (a_ij + b_ij) \in W$ och fr varje $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda A = (\lambda a_ij) \in W$ då $a_ij + b_ij = 0, \lambda a_ij = 0$ för $i > j$.

(b) $W = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n, a_1 + \ldots + a_n = 0\} \subset \mathbb{R}^n$.
Låt $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in W$ och $\lambda \in \mathbb{R}$, då ser man att: $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) = (a_1 + \ldots + a_n) + (b_1 + \ldots + b_n) = 0 + 0 = 0$ och $\lambda a_1 + \ldots + \lambda a_n 0 \lambda(a_1 + \ldots + a_n) = \lambda \cdot 0 = 0$. Det följer att W är ett delrum

(c) $W = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n, a_1 + \ldots + a_n = 5\} \subset \mathbb{R}^n$.
I det här fallet r $(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots+(a_n+b_n) = (a_1+\ldots+a_n)+(b_1+\ldots+b_n) = 5 + 5 = 10$ som visar att W inte är ett delrum.

(d) $W = \{f \in C(\mathbb{R}), f(-x) = f(x) \text{ för alla } x \in \mathbb{R}\}$. $C(\mathbb{R}^n)$ betecknar vektorummet av all funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Låt $f_1, f_2 \in W$ och $\lambda \in \mathbb{R}$. $(f_1 + f_2)(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = -f_1(x) - f_2(x) = -(f_1 + f_2)(x)$. and $(\lambda f_1)(-x) = \lambda f_1(-x) = \lambda(-f_1(x)) = -\lambda f_1(-x) = -(\lambda f_1)(x)$. Detta bevisar att W är ett delrum.

(2) Visa att $\{(2, -3, 5), (1, 0, -2), (0, 2, -1)\}$ utgör en bas till $\mathbb{R}^3$ och att $\{x^2 + 3x - 2, 2x^2 + 5x - 3, -x^2 - 4x + 4\}$ utgör en bas till $P_2(\mathbb{R})$.

Man vet att vektorerna spänner upp $\mathbb{R}^3$ och all elemnt i $\mathbb{R}^3$ skrivs som en linjär kombination av dem 3 p ett unikt stt (de är linjär oberoende) om determinanten av matrisen vars kolumnerna bestr av de tre vektorerna är icke noll.

$$det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} = 15 \neq 0$$

Samma proceduren fr $\{x^2 + 3x - 2, 2x^2 + 5x - 3, -x^2 - 4x + 4\}$ som, med avseende till den standard bas till $P_2(\mathbb{R})$ har coordinater: $(-2, 3, 1), (-3, 5, 2), (4, -4, -1)$.

$$det \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 3 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

(3) Bestäm en bas till $C(A), R(A), N(A)$ för matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Ange också matrisens rang.

Gauss elimination ger:

$$A \to A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

som visar att $R(A)$ späns av alla tre raderna och då är $R(A) = \mathbb{R}^3$. En bas för $C(A)$ ges av kolumnerna som motsvarar kolumnerna med en ledande etta i A', och då är:

$$C(A) = Span((1, 2, -1), (1, 1, -1), (2, 3, 2)).$$

Slutningen från ekvationen $5 = rang(A) + nullity(A)$ följer det att $nullity(A) = 2$. Om man löser systemet $A\underline{x} = \underline{0}$, from Gauss-elimineringen ser man att man behver 2 parameter och att lösningen givs av:

$$N(A) = Span\{(2, \frac{-6}{4}, \frac{-6}{4}, 0, 1), (\frac{14}{4}, , \frac{-20}{4}, \frac{-2}{4}, 1, 0)\}.$$

(4) Betrakta funktionen $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definierad som $T(p(t)) = (p(0), p(1), p(2))$. Visa att T är en linjär avbildning och bestäm den associerad matris $[T]$ (med avseende till de standard-baser).

- T är linjär: låt $p_1(t), p_2(t) \in P_2(\mathbb{R})$ och $k \in \mathbb{R}$.
  $T(p_1 + p_2) = (p_1(0) + p_2(0), p_1(1) + p_2(1), p_1(2) + p_2(2)) = (p_1(0), p_1(1), p_1(2)) + (p_2(0), p_2(1), p_2(2)) = T(p_1) + T(p_2)$.
  $T(kp) = (kp(0), kp(1), kp(2)) = k(p(0), p(1), p(2)) = kT(p)$.
- Matris: $T(1) = (1, 1, 1), T(t) = (0, 1, 2), T(t^2) = (0, 1, 4)$ som ger:

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$