(1) Betrakta följande funktion: $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ definierad som $T(f(t)) = f'(t)$ (derivatan).

(a) Visa att T är en linjär avbldning. T är linjär då

- $T(p_1 + p_2) = (p_1 + p_2)' = p_1' + p_2'$ för alla $p_1, p_2 \in P_3(\mathbb{R})$.
- $T(kp) = (kp)' = k(p)' = kT(p)$, för alla $p \in P_3(\mathbb{R}), k \in \mathbb{R}$.

(b) Bestäm $Ker(T)$. Låt $p(t) = a_o + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in P_3(\mathbb{R})$, $T(p(t)) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2$. Det följer att:

$$Ker(T) = \{p(t) \in P_3(\mathbb{R}) \text{ s.a. } p'(t) = 0\} = \{a_o + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \text{ s.a. } a_1 = a_2 = a_3 = 0\}.$$

Detta betyder att $Ker(T) = \mathbb{R}$.

(c) Är T surjektiv? Är T bijektiv? Är T en isomorfi? Eftersom är $\dim(P_3(\mathbb{R}) = 4 = \dim(Ker(T)) + \dim(Im(T))$ det följer att $\dim(Im(T)) = 3 = \dim(P_2(\mathbb{R}))$ som visar att T är surjektiv. T kan inte vara injektiv då $Ker(T) \neq \{\vec{0}\}$ och därför är T inte en isomorfi.

(2) Låt $B = \{2x^2 - x, 3x^2 + 1, x^2\} \subset P_2(\mathbb{R})$.

(a) Visa att B är en bas till $P_2(\mathbb{R})$.
I standardbasen har vektorerna koordiater: $(0, -1, 2), (1, 0, 3), (0, 0, 1)$ och

$$det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

Detta visar att B är bas.

(b) Låt $S_k = \{1, x, \ldots, x^k\}$ vara standardbasen till $P_k(\mathbb{R})$. Bestäm basbytematris $[id]_{S_2 \to B}$.

$$[id]_{S_2 \to B} = ([id]_{B \to S_2})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Låt $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ definierad som $T(f(t)) = f'(t)$ (som tidigare), bestäm $[T]_{S_3 \to S_2}$ och $[T]_{S_3 \to B}$.
$T(1) = 0, T(t) = 1, T(t^2) = 2t, T(t^3) = 2t^2$)s som ger:

$$[T]_{S_3 \to S_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Dessutom är

$$[T]_{S_3 \to B} = [id]_{S_2 \to B}[T]_{S_3 \to S_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(3) Betrakta fljande funktion: $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definierad som

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a \\ c & c+d \end{pmatrix}$$

(a) Visa att T är en linjär avbldning. Funktionen är definierad genom en matris som är ekvivalent med att säga att den är linjär.

(b) Visa att T är inverterbar Matrisen associerad till T med avseende till standard basen är:

$$[T]_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

som har determinanten lika med -1 och därför är inverterbar. Det följer att T är inverterbar.

(c) Bestäm inversen. Inversen T^{-1}är den linjär avbildning associerad till matrisen $[T]^{-1}$. Genom Gauss eliminering ser man att

$$[T]_S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Så att

$$T^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a-b \\ c \\ -c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a-b \\ c & -c+d \end{pmatrix}$$