Några extra uppgifter, vecka 44

Bestäm om följande avbildningar, T, är diagonaliserbar.
När svaret är positiv bestäm en bas B s.a. $[T]_B$ är en diagonal matris.

(1) $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R}), T(ax^2 + bx + c) = cx^2 + bx + a$. Matrisen med avseende till standardbasen $S = \{1, x, x^2\}$ är

$$[T]_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Karakteristiskpolynomet är $P_T(\lambda) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)$ som ger tre distinkta egenvärden $0, 1, -1$. Detta redan säger att avbildningen är diagonaliserbar. Vi bestämmer nu egenvektorerna till T.

För $\lambda = 0$, upfyller ekenvektorerna systemet:

$$\begin{cases} z &= 0 \\ x &= 0 \end{cases}$$

som betyder att $E_0 = Span(0, 1, 0)$. För $\lambda = 1$, upfyller ekenvektorerna systemet:

$$\begin{cases} -x + z &= 0 \\ -y &= 0 \end{cases}$$

som betyder att $E_0 = Span(1, 0, 1)$. För $\lambda = -1$, upfyller ekenvektorerna systemet:

$$\begin{cases} x + z &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$$

som betyder att $E_0 = Span(1, 0, -1)$. Det följer att $B = \{(0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, -1)\}$

(2) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (y, -x, 2z)$. Samma som tidigare. Matrisen med avseende till standardbasen $S = \{1, x, x^2\}$ är

$$[T]_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Karakteristiskpolynomet är $P_T(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda^2 + 2)$ som har bara $\lambda = 2$ som reella lösning. För $\lambda = 2$, upfyller ekenvektorerna systemet:

$$\begin{cases} -2x + y &= 0 \\ -x - 2y &= 0 \end{cases}$$

som betyder att $E_2 = Span(0, 0, 1)$. Eftersom egenvektorerna spänner upp bara ett rum av dimension 1 finns det ingen bas som består av egenvektorerna.

(3) $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, T(z, w) = (z + iw, iz + w)$. Matrisen med avseende till basen $S = \{(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i)\}$ är

$$[T]_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Karakteristiskpolynomet är $P_T(\lambda) = (\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2$ som har ingen reella l¨sning. Det följer att matrisen inre r diagonaliserbar, d.v.s. det finns ingen bas som består av egenvektorer.

(4) $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R}), T(A) = A^T$.

Matrisen med avseende till standardbasen är

$$[T]_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Karakteristiskpolynomet är $P_T(\lambda) = -(\lambda-1)^3(\lambda+1)$ Matrisen har två egenvärden $\lambda = 1, -1$ och $a.m(1) = 3, a.m(-1) = 1$. Eftersom $a.m(1) + a.m(-1) = 4 = \dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R}))$ så blir matrisen diagonaliserbar om och endast om $g.m(1) = 3$ (eftersom $1 \leq g.m(-1) \leq a.m(-1) \leq 1$ ger att $a.m(-1) = g.m(-1) = 1$.). För $\lambda = 1$, upfyller ekenvektorerna systemet:

$$\begin{cases} -y+z &= 0 \\ y-z &= 0 \end{cases}$$

som betyder att $E_1 = Span\{(1,0,0,0),(0,0,0,1),(0,1,1,0)\}$ som har dimension 3. Det följer att systemet är diagonaliserbar. För $\lambda = -1$, upfyller ekenvektorerna systemet:

$$\begin{cases} -2x &= 0 \\ y+z &= 0 \\ 2z &= 0 \end{cases}$$

som betyder att $E_1 = Span(0,1,-1,0)\}$. Vektorerna $\{(1,0,0,0),(0,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,-1,0)\}$ utgör en bas som består av egenvektorer.