(1) Två ortonormala vektorer i $\mathbb{R}^3$ är givna:

$$\vec{v_1} = \frac{1}{2}\vec{e_1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e_2} + \frac{1}{2}\vec{e_3}, \vec{v_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e_1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e_3}$$

i en ON-bas $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, med avseende till skalärprodukten. Bestäm en vektor $\vec{v_3} \in \mathbb{R}^3$ så att $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ blir en ON-bas.

Lösning.

Låt $\vec{v_3} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2} + c\vec{e_3}, a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\vec{v_1}\vec{v_3} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{\sqrt{2}}b + \frac{1}{2}c = 0, \qquad \vec{v_2}\vec{v_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}a - \frac{1}{\sqrt{2}}c = 0,$$

Det följer att $a = c$ och $b = -\sqrt{2}a$. Detta betyder att:

$$\vec{v_3} \in Span(1, -\sqrt{2}, 1)$$

Eftersom $\|\vec{v_3}\| = 2t$ för t som varierar i $\mathbb{R}$ och vi vill ha $\|\vec{v_3}\| = 1$ så är $t = \frac{1}{2}$ och $\vec{v_3} = \frac{1}{2}(1, -\sqrt{2}, 1)$.

(2) Bestäm $\dim(V)$ samt en ON-bas till inreproduktrummet V med skalärprodukt, där:

(a) $V = Span\{(1, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (3, -1, 2, 1), (2, 0, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^4$.

(b) $V = \{(x, y, x),$ s.a. $x + y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$.

Lösning.

(a) $V = Span\{(1, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (3, -1, 2, 1), (2, 0, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^4$. De fyra vektorer är linjärt beroende och då är $\dim(V) < 4$. Man ser att $(2, 0, 1, 0), (3, -1, 2, 1), (2, 0, 1, 1)$ är linjärt oberoende:

$$rank \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Det följer att $\dim(V) = 3$ och att $\{(2, 0, 1, 0), (2, 0, 1, 1), (3, -1, 2, 1)\}$ är en bas till V. Gram-Shmidt ger:

$$\begin{array}{lcccc} \vec{v}_1 & = & (2,0,1,0) & & \\ \vec{v}_2 & = & (2,0,1,1) - \frac{5}{5}(2,0,1,0) & = & (0,0,0,1) \\ \vec{v}_3 & = & (3,-1,2,1) - \frac{8}{5}(2,0,1,0) - \frac{1}{1}(0,0,0,1) & = & (-\frac{1}{5}, -1, \frac{2}{5}, 0) \end{array}$$

Vektorerna

$$\{\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), \frac{5}{\sqrt{30}}(-\frac{1}{5}, -1, \frac{2}{5}, 0)\}$$

utgör en ON-bas till V.

(b) $V = \{(x, y, x),$ s.a. $x+y+z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$. V kan skrivas som $Span((1, 0, -1), (0, 1, -1))$ och då är $\dim(V) = 2$. Enligt Gram-Schmidt basen $(1, 0, -1), (0, 1, -1)$ leder till den ON-bas $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \frac{2}{3}(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})\}$.

(3) Betrakta $C[0, 1]$, rummet av kontinuerliga funktioner från $[0, 1]$ till $\mathbb{R}$.

$$\int_0^1 f_1(t)f_2(t)dt$$

definierar en inre-produkt. Låt $W = Span\{t, \sqrt{t}\} \subset C[0, 1]$. Bestäm $proj_W(t^2)$.

Lösning.

Först ska vi bestmma en ON-bas till W. Gram-Shmidt ger:

$$\begin{array}{lcccc} \vec{v}_1 & = & t & & \\ \vec{v}_2 & = & \sqrt{t} - \frac{\int_0^1 t\sqrt{t}dt}{\|t\|^2}t & = & \sqrt{t} - \frac{6}{5}t \end{array}$$

$$\|\vec{v}_1\|^2 = \frac{1}{3}, \|\vec{v}_2\|^2 = \frac{1}{50}$$

Vektorerna $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\} = \{\sqrt{3}t, 5\sqrt{2t}\}$ utgör en ON-bas till W

$$proj_W(t^2) =< t^2, \sqrt{3}t > \sqrt{3}t+ < t^2, 5\sqrt{2t} > 5\sqrt{2t}$$

Och då är:

$$proj_W(t^2) = \frac{3}{4}t + \frac{100}{7}\sqrt{t}.$$