Institutionen för Matematik
KTH

Kontrolskrivning till kursen SF1604 i Linjär algebra,
Oktober 1, 2010, 10:15-11:00.
Kursexaminator: Sandra Di Rocco

Poängen räknas som bonuspoäng till uppgift 1 i DEL I av tentamen.
Inget hjälpmedel tillåtet.
Lösningarna ska vara tydliga och ska MOTIVERAS.

Uppgift: Betrakta följande matris:

$$A = \begin{pmatrix} k-2 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & k+3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) (1 p.) Låt

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och betrakta systemet } A\underline{x} = \underline{b}$$

För vilka $k \in \mathbb{R}$ har systemet en unik lösning?
Lösning.

$$\det(A) = 2k(k+1)$$

Systemet har en unik lösning bara om $\det(A) \neq 0$, d.v.s för alla reella tal $k \neq 0, -1$.

(b) (1 p.) Kan vektorn $(103, 103, 103)$ skrivas som en linjär kombination av vektorer $(0, -1, 0), (0, 4, -2), (6, 5, 0)$, på ett unikt sätt? (Obs! Man van använda del (1) för att motivera svaret).
Lösning. Låt $k = 2$. Eftersom systemet $A\underline{x} = \underline{b}$ har en unik lösning så kan vektorn $\vec{b} = (1, 1, 1)$ skrivas som en linjär kombination av kolumnvektorerna i A, på ett unikt sätt. Systemet blir:

$$\begin{cases} & & 6z & = & 1 \\ -x & +4y & +5z & = & 1 \\ & -2y & & = & 1 \end{cases}$$

Detta har lösningen $(x, y, z) = (-\frac{13}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6})$, som ger

$$-\frac{13}{6}(0, -1, 0) - \frac{1}{2}(0, 4, -2) + \frac{1}{6}(6, 5, 0) = (1, 1, 1)$$

Det följer att det finns bara ett sätt för att skriva $(103, 103, 103)$ som en linjär kombination av vektorer $(0, -1, 0), (0, 4, -2), (6, 5, 0)$:

$$-\frac{1339}{6}(0, -1, 0) - \frac{103}{2}(0, 4, -2) + \frac{103}{6}(6, 5, 0) = (103, 103, 103).$$

(c) (1 p.) Bestäm för vilka $k \in \mathbb{R}$ är matrisen A inverterbar och beräkna inversen i sådana fall.

Lösning. Matrisen A är inverterbar bara om $\det(A) \neq 0$, d.v.s för alla reella tal $k \neq 0, -1$. Låt $k \neq 0, -1$. Med cofaktorer utväkling man ser att:

$$C_{1,1} = 2(k+3), C_{1,2} = 0, C_{1,3} = 2, C_{2,1} = -12, C_{2,2} = 0, C_{2,3} = 2(k-2),$$
$$C_{3,1} = -24, C_{3,2} = -(k-2)(k+3) - 6 = -k(k+1), C_{3,3} = 4(k-2).$$

Inversen blir:

$$A^{-1} = \frac{1}{2k(k+1)} \begin{pmatrix} 2(k+3) & -12 & -24 \\ 0 & 0 & -k(k+1) \\ 2 & 2(k-2) & 4(k-2) \end{pmatrix}$$