Institutionen för Matematik
KTH

Kontrolskrivning till kursen SF1604 i Linjär algebra,
November 12, 2010, 10:15-11:00.
Kursexaminator: Sandra Di Rocco

Poängen räknas som bonuspoäng till uppgift 2 i DEL I av tentamen.
Inget hjälpmedel tillåtet.
Lösningarna ska vara tydliga och ska MOTIVERAS.

Uppgift: Låt $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ vara standardbasen till $\mathbb{R}^3$. Betrakta vektorer:

$$\vec{v}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{v}_2 = \vec{e}_2, \vec{v}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3.$$

Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) (1 p.) Visa att $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ utgör en bas till $\mathbb{R}^3$. Kolumnerna till matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

motsvarar vectorerna i B. Eftersom determinanten är lika med $-2 \neq 0$ spänner kolumnerna hela $\mathbb{R}^3$ och är linjärt oberoende. Detta visar att B utgör en bas.

(b) (1 p.) Låt $A = [F]_S$ för en linjär avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Betrakta vektorn $\vec{w}$ med koordinater $(\vec{w})_B = (1,1,1)$, bestäm koordinaterna till vektorn $F(\vec{w})$ i basen B.

Basbytes matris från B till S är given av $[id]_{B\to S} = M$. Inversen giver basbytes matris från S till B :

$$[id]_{S\to B} = M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Man bestämmer inversen genom Gausseliminering:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Det följer att

$$[F]_B = [id]_{S\to B}[F]_S[id]_{B\to S} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 4 & 1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

DåÊär:

$$F(\vec{w})_B = [F]_B(\vec{w}_B) = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 4 & 1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

(c) (1 p.) Ge ett exempel på en linjär avbildning $T : V \to V, T \neq F$ sådan att $[T]_\beta = A$ för någon bas β till V.

Ett exemper kan vara $V = P_2(\mathbb{R})$ med $\beta = S$ standardbasen.

$$T(p(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 + 2a_1 + 3a_3 \\ 2a_0 + 3a_1 + a_3 \\ 2a_0 + 3a_2 \end{pmatrix}$$

Som definierar

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + 2a_1 + 3a_3) + (2a_0 + 3a_1 + a_3)x + (2a_0 + 3a_2)x^2.$$