Matematiska Institutionen
KTH

Tentamen i Linjär Algebra, SF1604 14 december, 2010.

Kursexaminator: Sandra Di Rocco

OBS! Svaret skall motiveras och lösningen skrivas ordentligt och klart. Inga hjälpmedel är tillåtna.
Betyg enligt följande tabell:

A	minst 35 poäng
B	minst 30 poäng
C	minst 25 poäng
D	minst 20 poäng
E	minst 15 poäng
Fx	13-14 poäng

Betyg Fx ger möjlighet till att komplettera till betyg E. Datumet och formen på kompletteringsprovet meddelas via email. **Skriv din email adress på tentamen.**

Del I

Totalt 15 poäng, inklusive bonuspoäng.
Bonus-poäng från KS1 kommer att läggas till de poäng i uppgift 1. Bonus-poäng från KS2 kommer att läggas till de poäng i uppgift 2. Den totala på uppgift 1(respektive 2) kan vara på högst 5 poäng.

1. (a) (1 p.) Bestäm k så att punkterna $(1,2),(2,4),(k,-1)$ ligger på en linje i $\mathbb{R}^2$.
   (b) (2 p.) Bestäm k så att vektorerna $(k+3,5,4),(5,k+3,5),(k-7,-5,k-7)$ spänner upp ett plan i $\mathbb{R}^3$ (d.v.s ett delrum av dimension 2).
   (c) (1 p.) Bestäm k så att vektorerna $(k+3,5,4),(5,k+3,5),(k-7,-5,k-7)$ utgör en bas till $\mathbb{R}^3$.
   (d) (1.p) Välj en k så att $B=\{(k+3,5,4),(5,k+3,5),(k-7,-5,k-7)\}$ utgör en bas till $\mathbb{R}^3$ och skriv koordinaterna till vektorn $(1,1,1)$ (given här med koordinater i standardbasen) i basen B.

2. Betrakta följande matris:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) (2 p.) Bestäm samtliga egenvärden till A och tillhörande egenvektorer.
   (b) (1 p.) Ange matrisen P och den diagonala matrisen D sådana att $P^{-1}AP=D$.
   (c) (2 p.) Bestäm A^5.

3. Låt M vara det linjära rummet:

$$M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ s.a. } 2x-y+3z=0\}.$$

(a) (1 p.) Bestäm en bas till M.

(b) (2 p.) Bestäm en ON-bas till M.

(c) (2 p.) Visa att M är isomorft till $\mathbb{R}^2$.

DEL 2

Totalt 15 poäng, inklusive bonuspoäng. Bonus-poäng från uppsatsen kommer att läggas till de poäng i detta avsnitt. Den totala kan vara på högst 15 poäng.

4. Låt $T_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning med matris (med avseende till standardbasen)

$$\begin{pmatrix} 2 & \alpha+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & \alpha-1 \end{pmatrix}$$

   (a) (2 p.) Bestäm $\dim(Ker(T_\alpha))$, för varje $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (b) (1 p.) Bestäm $\dim(Im(T_\alpha))$, för varje $\alpha \in \mathbb{R}$. (Obs $Im(T) = R(T)$ betecknar delrummet $Im(T) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3,$ s.a. $\vec{v} = T_\alpha(\vec{w})$ för någon $\vec{w} \in \mathbb{R}^3\}$.)

   (c) (2 p.) För vilken $\alpha \in \mathbb{R}$ är T_α diagonaliserbar?

5. Betrakta linjen $l \in \mathbb{R}^3$ av ekvation:

$$l : \begin{cases} 3x - y + 2z &= 2 \\ x + 2y - z &= 6 \end{cases}$$

   (a) (2 p.) Bestäm ekvationen av planet $\pi_1 \subset \mathbb{R}^3$ som innehåller l och punkten $(0,0,0)$.

   (b) (2 p.) Bestäm ekvationen av planet $\pi_2 \subset \mathbb{R}^3$ som innehåller l och är parallellt till linjen av parametriskekvation: $x = 2 + 3t, y = \pi + t, z = \sqrt{7} + t$.

   (c) (1 p.) Bestäm ekvationen av planet $\pi_3 \subset \mathbb{R}^3$ som innehåller l och är parallellt till linjen av ekvation: $x - y = 0, y + 2z = 0$.

6. Låt $S = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ vara standardbasen till $\mathbb{R}^n$ och låt $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara den linjär avbildning sådan att

$$T(\vec{e}_i) = \begin{cases} 0 & i = 1 \\ \vec{e}_{i-1} & i > 1 \end{cases}$$

   (a) (1 p.) Skriv matrisen av T med avseende till standardbasen: $A = [T]_{S\to S}$.

   (b) (2 p.) Bestäm A^k för $k = 1, \ldots, n$.

   (c) (2 p.) Bestäm $Ker(T^k), Im(T^k)$ för $k = 1, \ldots, n$.

DEL 3

7. Låt $a_1, \ldots, a_n$ vara reella tal. Följade matrisen kallas Vandermonde-matris:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

   (a) (4 p.) Visa att $\det(A) = \Pi_{1 \le i < j \le n}(a_j - a_i)$

(b) (3 p.) Låt V vara ett vektorrum av ändlig dimension och $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n \in V$. Visa att om det finns distinkta $t_1, \cdots, t_n$ som uppfyller relationen

$$\vec{v}_1 + t\vec{v}_2 + t^2\vec{v}_3 + \cdots t^{n-1}\vec{v}_n = \vec{0}$$

Då gäller att $v_1 = v_2 = \cdots = v_n = \vec{0}$.

8. (3 p.) Låt V vara ett vektorrum av ändlig dimension. Låt $\phi : V \to V$ vara en linjär avbildning med $rang(\phi) = 1$. Visa att $\phi \circ \phi = r\phi$ för något $r \in \mathbb{R}$.