Matematiska Institutionen
KTH

Tentamen i Linjär Algebra, SF1604 14 december, 2010.

Kursexaminator: Sandra Di Rocco

OBS! Svaret skall motiveras och lösningen skrivas ordentligt och klart. Inga hjälpmedel är tillåtna.
Betyg enligt följande tabell:

A	minst 35 poäng
B	minst 30 poäng
C	minst 25 poäng
D	minst 20 poäng
E	minst 15 poäng
Fx	13-14 poäng

Betyg Fx ger möjlighet till att komplettera till betyg E. Datumet och formen på kompletteringsprovet meddelas via email. **Skriv din email adress på tentamen.**

Del I

Totalt 15 poäng, inklusive bonuspoäng.
Bonus-poäng från KS1 kommer att läggas till de poäng från uppgift 1. Bonus-poäng från KS2 kommer att läggas till de poäng i uppgift 2. Den totala påäng från uppgift 1, respektive 2, kan vara på högst 5 poäng.

1. (a) (1 p.) Bestäm k så att punkterna $(1,2),(2,4),(k,-1)$ ligger på en linje i $\mathbb{R}^2$.
   Punkterna ligger på ett linje om två ligger i delrummet som den tredje genererar. Vi ser att $(2,4)=2(1,2)$ och $(k,-1)=t(1,2)$ om $k=t=-\frac{1}{2}$.

   (b) (2 p.) Bestäm k så att vektorerna $(k+3,5,4),(5,k+3,5),(k-7,-5,k-7)$ spänner upp ett plan i $\mathbb{R}^3$ (d.v.s ett delrum av dimension 2).
   De tre vektorer $(k+3,5,4),(5,k+3,5),(k-7,-5,k-7)$ måste vara linjärt beroende, men två av dem måste vara linjärt oberoende. Man ser att

$$a(k+3,5,4),+b(5,k+3,5)+c(k-7,-5,k-7)=(0,0,0)\Rightarrow\left\{\begin{array}{lcl} a(k+3)+5b+c(k-7) & = & 0\\ 5a+b(k+3)-5c & = & 0\\ 4a+5b+c(k-7) & = & 0\end{array}\right.$$

   Matrisen associerad till systemet är:

$$A=\begin{pmatrix} k+3 & 5 & k-7\\ 5 & k+3 & -5\\ 4 & 5 & k-7\end{pmatrix}$$

   För att de tre vektorer ska ligga på ett plan måste matrisen A ha rang <3.

$$\det(A)=(k-1)(k-2)^2$$

som visar att $rang(A) < 3$ bara om $k = 1, 2$. Sen kan vi kolla att

$$k = 1 : rang \begin{pmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 5 & 4 & -5 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} = 2 \text{ och } k = 2 : rang \begin{pmatrix} 5 & 5 & -5 \\ 5 & 5 & -5 \\ 4 & 5 & -5 \end{pmatrix} = 2$$

Svaret är $k = 1, 2$.

(c) (1 p.) Bestäm k så att vektorerna $(k+3, 5, 4), (5, k+3, 5), (k-7, -5, k-7)$ utgör en bas till $\mathbb{R}^3$. Eftersom vi har tre vektorer så kommer de att utgöra en bas när de är linjärt oberoende. Vi redan visat att detta händer när $\det(A) \neq 0$, d.v.s. för $k \neq 1, 2$.

(d) (1.p) Välj en k så att vektorerna $B = \{(k+3, 5, 4), (5, k+3, 5), (k-7, -5, k-7)\}$ utgör en bas till $\mathbb{R}^3$ och skriv koordinaterna till vektor $(1, 1, 1)$ (given här med koordinater i standardbasen) i basen B.

Man kan välja, till exempel, $k = 0$. Låt (x, y, z) vara koordinaterna i basn B.

$$(1, 1, 1) = x(3, 5, 4) + y(5, 3, 5) + z(-7, -5, -7) \Rightarrow \begin{cases} 3x + 5y - 7z & = & 1 \\ 5x + 3y - 5z & = & 1 \\ 4x + 5y - 7z & = & 1 \end{cases}$$

Genom Gauss elimination ser man att systemet har $(x, y, z) = (0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

2. Betrakta följande matris:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) (2 p.) Bestäm samtliga egenvärden till A och tillhörande egenvektorer.

$\det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0$ har tre distinkta lösningar: $\lambda = 1, 2, 3$.

Egenvärden $\lambda = 1$ leder till systemet $(A - I_3)\underline{x} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alltså är $t(-1, 0, 1), t \neq 0$ egenvektorer till $\lambda = 1$. Egenvärden $\lambda = 2$ leder till systemet $(A - 2I_3)\underline{x} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alltså är $t(-2, 1, 0), t \neq 0$ egenvektorer till $\lambda = 1$. Egenvärden $\lambda = 3$ leder till systemet $(A - 3I_3)\underline{x} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alltså är $t(0, 1, -1), t \neq 0$ egenvektorer till $\lambda = 1$.

(b) (1 p.) Ange matrisen P och den diagonala matrisen D sådana att $P^{-1}AP = D$. D består av egenvärden på diagonalen och P är barbytes matris från basen av egenvektoren till standard basen:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) (2 p.) Bestäm A^5. Observera att $A = PDP^{-1}$ och $A^5 = PD^5P^{-1}$. Genom Gauss eliminering ser man att

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

och att

$$A^5 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^5 & 0 \\ 0 & 0 & 3^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 & 62 & 62 \\ 211 & 453 & 211 \\ -242 & -484 & -241 \end{pmatrix}$$

3. Låt M vara det linjära rummet:

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ s.a. } 2x - y + 3z = 0\}.$$

(a) (1 p.) Bestäm en bas till M. Man ser att $(x, y, z) \in M$ om $(x, y, z) = (t, 2t + 3s, s)$ för några $t, s \in \mathbb{R}$. Detta betyder att $M = Span((1, 2, 0), (0, 3, 1))$. Eftersom är $(1, 2, 0), (0, 3, 1)$ linjärt oberoende utgör de en bas till M.

(b) (2 p.) Bestäm en ON-bas till M. Man kan använda Gram-Schmidt och får:

$$\begin{aligned} \vec{w_1} &= (1, 2, 0) \\ \vec{w_2} &= (0, 3, 1) - \tfrac{(1,2,0)\cdot(0,3,1)}{\|(1,2,0)\|^2}(1, 2, 0) = (\tfrac{-6}{5}, \tfrac{3}{5}, 5) \end{aligned}$$

Det följer att

$$\left(\frac{\vec{w_1}}{\|\vec{w_1}\|}, \frac{\vec{w_2}}{\|\vec{w_2}\|}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0), \frac{5}{\sqrt{70}}(-6, 3, 5)\right)$$

utgör en ON-bas till M.

(c) (2 p.) Visa att M är isomorft till $\mathbb{R}^2$. Man ska bestämma en isomorfi $\phi : W \to \mathbb{R}^2$. Vi kan bestämma hur ϕ ska fungerar på bas-vektorerna: $\phi(1, 2, 0) = (1, 0), \phi(0, 3, 1) = (0, 1)$ s.a. om $\vec{v} \in M, \vec{v} = t((1, 2, 0) + s(0, 3, 1)$ gäller att:

$$\phi((t, 2t + 3s, s) = (t, s) \in \mathbb{R}$$

där (t, s) är koordinater in den standard basen. Matrisen associerat till ϕ är T_2 som är inverterbar, vilket betyder att ϕ är en isomorfi.

DEL 2

Totalt 15 poäng, inklusive bonuspoäng. Bonus-poäng från uppsatsen kommer att läggas till de poäng i detta avsnitt. Den totala kan vara på högst 15 poäng.

4. Låt $T_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning med matris (med avseende till standardbasen)

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & \alpha + 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & \alpha - 1 \end{pmatrix}$$

(a) (2 p.) Bestäm $\dim(Ker(T_\alpha))$, för varje $\alpha \in \mathbb{R}$. $Ker(T_\alpha) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ s.a. } A_\alpha \underline{x} = 0\}$. Systemet

$$\begin{cases} 2x + (\alpha + 1)y &= 0 \\ y &= 0 \\ 2x + \alpha y + (\alpha - 1)x &= 0 \end{cases}$$

Har icke-noll lösningar bara om $\alpha = 1$ när lösningar blir av form $t(0, 0, 1), t \in \mathbb{R}$. Det följer att

$$\dim(Ker(T_\alpha)) = \begin{cases} 0 & \alpha \neq 1 \\ 1 & \alpha = 1 \end{cases}$$

(b) (1 p.) Bestäm $\dim(Im(T_\alpha))$, för varje $\alpha \in \mathbb{R}$. (Obs $Im(T) = R(T)$ betecknar delrummet $Im(T) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3,$ s.a. $\vec{v} = T_\alpha(\vec{w})$ för någon $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$.)

Eftersom gäller att $3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim(Ker(T_\alpha)) + \dim(Im(T_\alpha))$, är:

$$\dim(Im(T_\alpha)) = \begin{cases} 3 & \alpha \neq 1 \\ 2 & \alpha = 1 \end{cases}$$

(c) (2 p.) För vilken $\alpha \in \mathbb{R}$ är T_α diagonaliserbar?

$\det(A_\alpha - I_3) = (1-\lambda)(2-\lambda)(\alpha - 1 - \lambda)$. Det följer att om $\alpha \neq 2, 3$ har matrisen 3 distinkta egenvärden vilket betyder att den är diagonaliserbar.

Om $\alpha = 2$ då har matrisen

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

egenvärdet $\lambda = 2$ av algebraisk multiplicitet $a.m(2) = 1$ och $\lambda = 1$ av algebraisk multiplicitet $a.m(1) = 2$. Egenrummet $E_1 = Span(0, 0, 1)$ som ger att $\lambda = 1$ har geometrisk multiplicitet $g.m(1) = 1$. Detta betyder att A_2 och då F_2 inte är diagonaliserbar.

Om $\alpha = 3$ då har matrisen

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

egenvärdet $\lambda = 2$ av algebraisk multiplicitet $a.m(2) = 2$ och $\lambda = 1$ av algebraisk multiplicitet $a.m(1) = 1$. Egenrummet $E_2 = Span(0, 0, 1)$ som ger att $\lambda = 2$ har geometrisk multiplicitet $g.m(2) = 1$. Detta betyder att A_2 och då F_2 inte är diagonaliserbar.

Slutsatsen är att F_α är diagonaliserbar om och endast om $\alpha \neq 2, 3$.

5. Given är linjen $l \in \mathbb{R}^3$ av ekvation:

$$l : \begin{cases} 3x - y + 2z &= 2 \\ x + 2y - z &= 6 \end{cases}$$

(a) Bestäm ekvationen av planet $\pi_1 \in \mathbb{R}^3$ som innehåller l och punkten $(0, 0, 0)$.

Ett plan som innehåller l måste vara en linjär kombination av planerna $3x - y + 2z = 2, x + 3y - z = 6$, dvs:

$$\pi_1 = t(3x - y + 2z) + s(x + 2y - z) = 2t + 6s \text{ för någon } s, t \in \mathbb{R}.$$

Man ser att $(0, 0, 0) \in \pi_1$ om $2t = -6s$. Vi kan välja $t = -3, s = 1$ och får ekvationen

$$\pi_1 : 8x - 5y + 7z = 0.$$

(b) Bestäm den ekvationen av planet $\pi_2 \in \mathbb{R}^3$ som innehåller l och är parallelt till linjen av parametrikekvation: $x = 2 + 3t, y = \pi + t, z = \sqrt{7} + t$. Som tidigare $\pi_1 = t(3x - y + 2z) + s(x + 2y - z) = 2t + 6s$ d.d.s:

$$x(3t + s) + y(-t + 2s) + z(2t - s) = 2t + 6s.$$

som ger att normal vektorn till π_2 är $\vec{n} = (3t + s, -t + 2s, 2t - s)$. Direktionsvektor till $x = 2 + 3t, y = \pi + t, z = \sqrt{7} + t$ är $\vec{v} = (3, 1, 1)$ so måste vara ortogonal mot $\vec{n}$.

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 3(3t + s) - t + 2s + 2t - s = 10t + 4s = 0$$

Välj t.ex $t = 2, s = -5$ som ger

$$\pi_2 : x - 12y + 9z = 26.$$

(c) Bestäm den ekvationen av planet $\pi_3 \in \mathbb{R}^3$ som innehåller l och är parallelt till linjen av ekvation: $x - y = 0, y + 2z = 0$.

$$\pi_3 : 19x - 11y + 16z = 2.$$

Den parametrisk ekvation till linjen $x - y = 0, y + 2z = 0$ är $y = x = 2t, z = t$. Som tidigare man får att:

6. Låt $S = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ vara den standardbasen till $\mathbb{R}^n$ och låt $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara den linjär avbildning sådan att

$$T(\vec{e}_i) = \begin{cases} 0 & i = 1 \\ \vec{e}_{i-1} & i > 1 \end{cases}$$

(a) (1 p.) Skriv matrisen av T med avseende till standardbasen: $A = [T]_{S \to S}$.
Man ser att:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) (2 p.) Bestäm A^k för $k = 1, \dots, n$. A^k är matrisen associerat till T^k och

$$T^k(\vec{e}_i) = \begin{cases} 0 & i = 1, \dots, k \\ \vec{e}_{i-k} & i > k \end{cases}$$

Det följer att

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

för $k = 1, \dots, n$.

(c) (2 p.) Bestäm $Ker(T^k), Im(T^k)$ för $k = 1, \dots, n$.
Från matrisen A^k ser man att $Ker(T^k) = Span(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_k}) \cong \mathbb{R}^k$ och $Im(T^k) = Span(\vec{e_{k+1}}, \dots, \vec{e_n}) \cong \mathbb{R}^{n-k}$.

DEL 3

7. Låt $a_1, \dots, a_n$ vara reella tal. Följade matrisen kallas Vandermonde-matris:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

(a) (3 p.) Visa att $\det(A) = \Pi_{1 \le j < i \le n}(a_i - a_j)$
Vi visar detta med hjälp av induktion på n. Om $n = 1$ då är $A = (1)$. Om $n = 2$ då är

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = a_2 - a_1.$$

Antar att $\det(A) = \Pi_{1 \le j < i \le k}(a_j - a_i)$ for en Vandermonde-matris an typ $k \times k$ för $k \le n$.
Betrakta polynomet:

$$p(t) = \Pi_{j=1}^{n-1}(t - a_j) = t^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} c_i t^i$$

för några $c_1, \cdots c_{n-1} \in \mathbb{R}$. Efter elementära rad operationer som adderar till den sista raden R_n den linjär kombination, $\sum_1^{n-2} c_i R_i$, av de andra rader $R_1, \cdots R_{n-1}$ man får att:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p(a_1) & p_(a_2) & \cdots & p(a_n) \end{pmatrix}$$

Men $p(a_i) = 0$ för varje $i \leq n-1$ och $p(a_n) = \Pi_{j=1}^{n-1}(a_n - a_j)$ som ger:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & p(a_n) \end{pmatrix} = \Pi_{j=1}^{n-1}(a_n - a_j)\det(B)$$

där B är en Vandermonde-matris an typ $(n-1) \times (n-1)$.

(b) (3 p.) Låt V vara ett vektorrum och $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n \in V$. Visa att om det finns distinkta $t_1, \cdots t_n$ som uppfyller relationen

$$\vec{v}_1 + t\vec{v}_2 + t^2\vec{v}_3 + \cdots t^{n-1}\vec{v}_n = \vec{0}$$

Då gäller att $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \cdots = \vec{v}_n = \vec{0}$.

Antar att det finns $t_1 \neq t_1 \neq \cdots \neq t_t$ s.a

$$\vec{v}_1 + t\vec{v}_2 + t^2\vec{v}_3 + \cdots t^{n-1}\vec{v}_n = \vec{0}, i = 1, \cdots, n$$

Detta kan skrivar som:

$$(v_{1j}...v_{nj}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ t_1^2 & t_2^2 & \cdots & t_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & \cdots & t_n^{n-1} \end{pmatrix} = (0 \cdots 0)$$

för $j = 1, \cdots, m$, där $\vec{v}_i = (v_{i1}, \cdots v_{im})$ och $\dim(V) = m$. Eftersom $t_i \neq t_j$ är

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ t_1^2 & t_2^2 & \cdots & t_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & \cdots & t_n^{n-1} \end{pmatrix} = \Pi_{1 \leq j < i \leq n}(t_i - t_j) \neq 0$$

Det följer att:

$$(v_{1j}...v_{nj})AA^{-1} = (0 \cdots 0)A^{-1} = (0 \cdots 0)$$

För $j = 1, \cdots, m$, som visar att $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \cdots = \vec{v}_n = \vec{0}$.

8. Låt V vara ett vektorrum av ändlig dimension. Låt $\phi : V \to V$ vara en linjär avbildning med $rang(\phi) = 1$. Visa att $\phi \circ \phi = r\phi$ för något $r \in \mathbb{R}$.

Låt $Im(\phi) = Span(\vec{v})$ för någon vektor $v \in V$. För varje $\vec{w} \in V$ gäller att:

$$\phi(\vec{w}) = a_w\phi(\vec{v}), \text{för ett tal } a_w \in \mathbb{R}.$$

Så Det finns ett tal $a_{\phi(v)}$ s.a. $\phi(\phi(\vec{v})) = a_{\phi(v)}\phi(v)$. det följer att:

$$\phi \circ \phi(\vec{w}) = \phi(a_w\phi(\vec{v})) = a_w(\phi(\phi(\vec{v})) = a_w a_{\phi(v)}\phi(\vec{v}) = a_{\phi(v)}(a_w\phi(\vec{v})) = a_{\phi(v)}\phi(\vec{w}).$$

Detta visar att $\phi \circ \phi = a_{\phi(v)}\phi$, i.e. $r = a_{\phi(v)}$.