4. De vektorer som satisfierar den givna ekvationen är lösningsrummet till det homogena systemet
$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$$
och alla lösningsrum till homogena system är delrum till R^4. Vi kan välja $x_2 = t$, $x_3 = s$ och $x_4 = u$ godtyckligt och får då att
$$x_1 = -2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2t - s + 2u.$$
Alltså blir de sökta vektorerna (x_1, x_2, x_3, x_4) precis följande
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2t - s + 2u, t, s, u) = t(-2, 1, 0, 0) + s(-1, 0, 1, 0) + t(2, 0, 0, 1)$$
Vektorerna $(-2, 1, 0, 0)$, $(-1, 0, 1, 0)$ och $(2, 0, 0, 1)$ är linjärt oberoende och spänner upp lösningsrummet. Dimensionen blir alltså 3.

5. Att (x_1, x_2, x_3, x_4) tillhör bägge rummen innebär att både $x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$ och $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$ skall gälla. Detta ger ett homogent ekvationssystem. De sökta vektorerna (x_1, x_2, x_3, x_4) utgöres av lösningarna till ett homogent system och är därmed ett delrum till R^4. Löses detta system med Gausselemination får vi
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = t(0, 1, 0, 1) + s(1, 0, -1, 0).$$
Dimensionen blir två och som bas kan vi t ex välja $(0, 1, 0, 1)$ och $(1, 0, -1, 0)$

6. Enligt den gängse algoritmen utför vi elementära radoperationer på matrisen:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$
De tre raderna i sluttablån bildar en bas för $\mathbf{A}$:s radrum. I sluttablån är de tre första kolonnerna linjärt oberoende och bildar en bas för kolonnrummet. Motsvarande kolonner i $\mathbf{A}$ bildar då en bas för $\mathbf{A}$:s kolonnrum. En bas för givna kolonnrummet är alltså $(1, 2, -1)^T$, $(1, 1, -1)^T$ och $(2, 3, 2)^T$.

För nollrummet löser vi systemet $\mathbf{A}\bar{x}^T = \bar{0}^T$ med hjälp av Gausselimination
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 2 & 0 \end{array}\right].$$
Sätt $x_4 = t$ och $x_5 = s$ och vi får $x_3 = -\frac{3}{2}t - \frac{1}{2}s$,
$$x_2 = -x_3 - 3x_5 - 6x_5 = \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}s - 3t - 6s = -\frac{3}{2}t - \frac{11}{2}s,$$
och
$$x_1 = -x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = \frac{3}{2}t + \frac{11}{2}s - 2(-\frac{3}{2}t - \frac{1}{2}s) - t - 2s = \frac{5}{2}t + \frac{9}{2}s.$$
Alltså
$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{5}{2}t + \frac{9}{2}s, -\frac{3}{2}t - \frac{11}{2}s, -\frac{3}{2}t - \frac{1}{2}s, t, s) =$$
$$t(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 0) + s(\frac{9}{2}, -\frac{11}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1).$$
En bas för nollrummet är alltså $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 0)$ och $(\frac{9}{2}, -\frac{11}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1)$. Matrisens rang är lika med tre eftersom sluttablån bara innehåller tre icke nollrader.

7. Visa att vektorerna $(1,1,1,1)$, $(1,1,-1,-1)$, $(1,-1,1,-1)$ och $(1,-1,-1,1)$ bildar en bas för R^4 och bestäm sedan koordinmaterna fór vektorn $(1,2,3,4)$ i denna bas.

   De är en bas om den determinant som har de givna vektorerna som kolonner är skild ifrån noll. Vi får

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$$

   Nu återstår att lösa systemet

$$x_1(1,1,1,1) + x_2(1,1,-1,-1) + x_3(1,-1,1,-1) + x_4(1,-1,-1,1) = (1,2,3,4).$$

   Detta system har tablån

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

   Man får att $x_3 = -1/2$, $x_4 = 0$, $x_2 = -1$ och $x_1 = 5/2$.

8. Sätter upp en tablå med dessa vektorer som kolonner och kompletterar sedan med standardbasen som kolonner. Nu har vi garanterat ett kolonnrum som har dimension fyra:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Elementära radoperationer ger nu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & -6 & 1 & 25 \end{pmatrix}$$

   De fyra första kolonnerna i sluttablån är linjärt oberoende. Då kommer de fyra första kolonnerna i starttablån att vara linjärt oberoende. Eftersom de är fyra kommer de att spánna upp hela R^4 och därmed vara en bas för R^4.

   Svar: $\bar{e}_1 = (1,2,-2,1)$, $\bar{e}_2 = (2,1,3,1)$, $\bar{e}_3 = (1,3,4,1)$ och $\bar{e}_4 = (1,0,0,0)$.

9. Vektorn $(x_1,\ldots,x_5)$ tillhör V_1 precis då

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = t(1,2,3,2,1) + s(2,1,0,1,-1) + u(0,1,1,1,1)$$

för några tal s, t, u. Dvs precis då ekvationssystemet med tablån

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 2 & 1 & 1 & x_2 \\ 3 & 0 & 1 & x_3 \\ 2 & 1 & 1 & x_4 \\ 1 & -1 & 1 & x_5 \end{array}\right)$$

är lösbart. Gausselimination ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & -3 & 1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & -6 & 1 & x_3 - 3x_1 \\ 0 & -3 & 1 & x_4 - 2x_1 \\ 0 & -3 & 1 & x_5 - x_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & -3 & 1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & -1 & x_3 - x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 - x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_5 - x_2 + x_1 \end{array}\right).$$

Således gäller att $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ tillhör V_1 precis då $x_4 - x_2 = 0$ och $x_5 - x_2 + x_1 = 0$.

Liknande räkningar ger att en vektor $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ tillhör V_2 precis då $5x_4 - 4x_2 + x_3 - 2x_1 = 0$ och $4x_4 - 3x_2 + x_5 - x_1 = 0$, men OBSERVERA andra steg i Gausseliminationen ger andra ekvationer, så man kan få rätt svar fast med olika ekvationer.

En vektor $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ tillhör både V_1 och V_2 om följande system satisfieras av vektorn

$$\begin{cases} x_4 - x_2 & = 0 \\ x_5 - x_2 + x_1 & = 0 \\ 5x_4 - 4x_2 + x_3 - 2x_1 & = 0 \\ 4x_4 - 3x_2 + x_5 - x_1 & = 0 \end{cases}$$

Om dett system löses erhåller man lösningen

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = t(1, 1, 1, 1, 0).$$

SVAR: De gemensamma vektorerna är de som kan skrivas $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = t(1, 1, 1, 1, 0)$ för något tal t.

10. Antag att det finns en linjär relation mellan funktionerna

$$x(1 + t + t^2) + y \sin t + ze^t = 0 \qquad (\star)$$

som då skall vara giltig för alla värden på t. Speciellt gäller då likheten för $t = 0$ vilket ger $x + 0y + z = 0$ dvs att $x = -z$. Detta ger att med valet $t = -\pi$ att

$$x(1 - \pi + \pi^2) + 0y - x(e^{-\pi}) = 0.$$

Om då $x \neq 0$ så måste

$$1 - \pi + \pi^2 = \frac{1}{e^\pi}.$$

Högra ledet är mindre än ett men vänstar ledet är större än ett. Enda möjligheten är att $x = 0$ och därmed också att $z = 0$. Ekvationen $(\star)$ ger då $y \sin t = 0$ och alltså måste också $y = 0$. Alltså finns ingen icke trivial linjär relation mellan funktinerna. De är alltså linjärt oberoende.

11. Rummet P_3 av polynom av grad högst tre har basen 1, t, t^2, t^3. De givna polynomens koordinater i denna bas är $(1, 0, -1, 0)$, $(0, 2, 0, -1)$ och $(1, 1, 1, 1)$. Vi chansar nu, pga tidsbrist, på att komplettera med vektorn $(1, 0, 0, 0)$. Kontrollerar värdet av en determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Vi chansade rätt och de givna tre vektorerna kan kompletteras med polynomet 1 (som har koordinaterna $(1, 0, 0, 0)$) till en bas för P_3.

Anmärkning Varje vektorer, som inte tillhör spannet av de tre givna vektorerna, kan användas till att komplettera det tre givna vektorerna.