Uppgifter inför KS2, Matematik II för CL. VT11.

1. Uttryck vektorn v =(-7,3,0,8) som en linjärkombination av vektorerna
$\{(1,-1,1,0),(-1,1,0,2),(1,1,-1,-1)\}$

2.. Avgör om vektorerna $\overline{v_1},\overline{v_2},\overline{v_3}$ är linjärt beroende eller oberoende då

a) $\overline{v_1}=(1,-2,3)$, $\overline{v_2}=(5,6,-1)$ $\overline{v_3}=(3,2,1)$

b) $\overline{v_1}=(1,0,-1)$, $\overline{v_2}=(2,1,2)$, $\overline{v_3}=(3,-2,0)$

3. Bestäm alla värden på k så att mängderna nedan är linjärt oberoende.
a) $\{(1,0,1,0),(0,1,1,1),(2,-3,-1,k)\}$ b) $\{(1,1,1,2),(1,-1,2,0),(-1,2,k,1)\}$

4. Kan följande vektorer bilda en bas i R^3 ?
a) $\overline{v_1}=(2,0,-1)$, $\overline{v_2}=(4,0,7)$ $\overline{v_3}=(-1,1,4)$
b) $\overline{v_1}=(1,1,2)$, $\overline{v_2}=(1,-1,-1)$, $\overline{v_3}=(2,1,1)$
c) $\overline{v_1}=(1,0,1)$, $\overline{v_2}=(-1,2,1)$, $\overline{v_3}=(1,3,5)$, $\overline{v_4}=(2,-1,-4)$
d) $\overline{v_1}=(1,-1,1)$, $\overline{v_2}=(1,2,-1)$, $\overline{v_3}=(3,0,1)$

5. Bestäm koordinaterna för vektorn $\overline{v}$ med avseende på basen S = $\{\overline{v_1,v_2,v_3}\}$ då
$\overline{v}=(2,-1,3)$, $\overline{v_1}=(1,0,0)$, $\overline{v_2}=(2,2,0)$, $\overline{v_3}=(3,3,3)$.

6. Bestäm alla värden på a, b och c så att matrisen A blir symmetrisk

$$A=\begin{pmatrix} 2 & a-2b+2c & 2a+b+c \\ 3 & 5 & a+c \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

7. Bestäm inversen till matrisen A då:

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

8. Visa att $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{9}{25} & \frac{4}{5} & -\frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{3}{5} & \frac{16}{25} \end{pmatrix}$ är en ON matris genom att

a) beräkna $A^T A$
b) studera radvektorerna i A
c) studera kolonnvektorerna i A.

9. Bestäm inversen till matrisen A i uppgift 8.

10. Vilka av följande matriser är ON-matriser och bestäm i sådana fall den tillhörande inversen.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $d)\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

11. Bestäm alla egenvärden och motsvarande normerade egenvektorer till följande

matriser:

$a)\begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ $b)\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

12. Bestäm alla egenvärden och motsvarande normerade egenvektorer till

följande matriser:

$a)\begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ -4 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $b)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

13. Bestäm egenvärden och tre parvis ortogonala och normerade egenvektorer till

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

14. Bestäm en ortogonalmatris P sådan att $P^T AP$ blir en diagonalmatris D samt ange D då A är matrisen i uppgift 13.

15. Transformera följande ekvationer till huvudaxelform

$a) -2x^2 + 4xy + y^2$ $\quad$ $b) 2x^2 - y^2 - z^2 + 4xy - 4xz + 8yz$

c) $3x^2 + 2xy + 3y^2$ $\quad$ d) $x^2 + 4xy + y^2$ $\quad$ e) $-x^2 + 4xy - 4yz + z^2$

16. Ange den geometriska betydelsen om uttrycken i 10a) – e) är

a) = 1 $\quad$ b) = -1 $\quad$ c) = 0

17. Låt $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -2 \end{pmatrix}$. Beräkna A^{11} .

Svar:

1. (-7,3,0,8)= $-2(1,-1,1,0)+3(-1,1,0,2)-2(1,1,-1,-1)$

2. a) linjärt beroende b) linjärt oberoende

3. a) linjärt oberoende för alla $k \neq -3$ b) linjärt oberoende för alla $k \neq -5/2$

4.a) och b) ja, de är linjärt oberoende.
   c) ej en bas 4 vektorer i R^3 kan ej vara linjärt oberoende
   d) Ej en bas, de är linjärt beroende.

5. $\overline{v_s} = (3,-2,1)$

6. a=11, b=-9, c=-13

7. a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -5 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ b) invers finns ej c)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -1 & 8 \\ 6 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

9. $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{9}{25} & \frac{12}{25} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{12}{25} & \frac{16}{25} \end{pmatrix}$

10 a) b) och d) är ON-matriser och inversen är dess transponat.

11. a) $\lambda_1 = -1, \bar{x} = \pm(4/\sqrt{17}, 1/\sqrt{17}); \lambda_2 = -2, \bar{x} = \pm(3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})$.
   b) $\lambda_1 = -3, x_1 = \pm(2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}); \lambda_2 = 2, x_2 = \pm(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$,

12 a)
$\lambda_1 = -2, x_1 = \pm(3/\sqrt{13}, 2/\sqrt{13}, 0); \lambda_2 = 4, \bar{x}_2 = \pm(5/\sqrt{129}, -10/\sqrt{129}, -2/\sqrt{129}); \lambda_3 = 6, x_3 = \pm(1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{}$
b) $\lambda_1 = -3, x_1 = \pm(1/\sqrt{11}, 1/\sqrt{11}, 3/\sqrt{11})/ \ \lambda_2 = 3, \bar{x}_2 = \pm(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}); \lambda_3 = 3, x_3 = \pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$

13.
$\lambda_1=-6, x_1=\pm(1/3,-2/3,2/3); \lambda_{2,3}=3, x_2=\pm(2/\sqrt{5},1/\sqrt{5},0), x_3=\pm(2/(3\sqrt{5}),-4/(3\sqrt{5}),5/(3\sqrt{5})), (tex)$

14. $\begin{pmatrix} 1/3 & 2/\sqrt{5} & 2/(3\sqrt{5}) \\ -2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/(3\sqrt{5}) \\ 2/3 & 0 & -5/(3\sqrt{5}) \end{pmatrix}$ D=diag(-6,3,3)

15. a) $-3\xi^2+2\eta^2$ b) $-6\xi^2+3\eta^2+3\tau^2$ c) $2\xi^2+4\eta^2$ d) $-\xi^2+3\eta^2$ e) $-3\xi^2+3\tau^2$

16. = 1 : a) hyperbel b) enmantlad rotationshyperboloid c) ellips d) hyperbel e)hyperbolisk cylinder

=-1 : a) hyperbel b) tvåmantlad rotationshyperboloid c) ingenting d) hyperbel e) hyperbolisk cylinder

=0 : a) två skilda räta linjer genom origo b) cirkulär dubbelkon c) origo d) två skilda räta linjer genom origo e) två skilda plan genom origo.

1 7. $\begin{pmatrix} -1 & 10237 & -2047 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10245 & -2048 \end{pmatrix}$