Uppgifter inför KS 5 den 16 maj 2011. Matematik II för CL.

Beräkna följande dubbelintegraler:

1. a) $\iint_D (x+y)dxdy$, över kvadraten $2 \le x \le 3$, $0 \le y \le 1$.

b) $\iint_D (\sin y + y\cos x)dxdy$ då D ges av $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$.

c) $\iint_D xy\cos(x^2+y^2)dxdy$ över $0 \le x \le \sqrt{\pi}$, $0 \le y \le \sqrt{\pi}$.

2. a) $\iint_D (xy+y^2)dxdy$, då D ges av $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$.

b) $\iint_D dxdy$, D definieras genom $2 \le x+y \le 6$, $x^2 \le y$ och $x \ge 0$.

c) $\iint_D \sqrt{xy}dxdy$, över fyrhörningen med hörnen i punkterna (1,1), (2,2), (1,2) och (2,4).

d) $\int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 y\cos x^5 dx$.

e) $\iint_D y\sqrt{x}dxdy$, D ges av $x \ge 0$, $y \ge x^2$ och $y \le 2-x^2$.

3. a) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$ då D ges av $x^2+y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

b) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$ då D ges av $x^2+y^2 \le y$, $x \ge 0$.

c) $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}dxdy$ då D ges av $1 \le 9x^2+4y^2 \le 4$.

4. a) $\iint_D (x-y)^2\sin^2(x+y)dxdy$ över kvadraten med hörn $(\pi,0)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$ och $(0,\pi)$.

b) $\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}e^{x-y}dxdy$, D ges av $1 \le x^2+y^2 \le 2$, $0 \le x-y \le 1$.

c) $\iint_D \frac{(x+y)^2}{1+x^2+y^2}dxdy$ över cirkelskivan $x^2+y^2 \le 1$.

Beräkna följande integraler:

5a) $\iiint_K (\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})dxdydz$ där K är kuben $1 \le x \le a$, $1 \le y \le a$ och $1 \le z \le a$.

b) $\iiint_K xyzdxdydz$, K ges av $0 \le y \le 1-x$, $0 \le z \le 1-x-y$ och $0 \le x \le 1$.

c) $\iiint_K \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, K begränsas av koordinatplanen och $x+y+z=1$.

d) $\iiint_K (1+x^2+y^2+z^2)^{-1}dxdydz$, över klotet $x^2+y^2+z^2 \le 1$.

e) $\iiint_K (x^2+y^2-z^2)\ dxdydz$, över klotet $x^2+y^2+z^2 \le 1$.

6.Beräkna arean av det område som begränsas av följande kurvor:

a) $(x-y)^2+x^2=a^2$

b) xy=4, xy=8, y=x och y=2x (x>1)

c) $y^2=2x$, $y^2=4x$, $x^2=2y$ och $x^2=4y$.

7. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av

a) planen $x-2y+z=1$, $2x-y+z=0$, $x=0$ och $y=0$.

b) cylindern $x^2+y^2=4$, paraboloiden $z=x^2+y^2$ och planet $z=0$.

c) cylindern $y=z^2$ samt planen $x=0$, $x=1$ och $y=1$.

8. Beräkna följande generaliserade multipelintegraler:

a) $\iint_D \frac{1}{x}dxdy$, D ges av $x \ge 1$, $0 \le xy \le 1$.

b) $\iint_D \frac{x}{(1+x^2)(1+x^2y^{2)}}dxdy$, D ges av $x>0$, $xy \ge 1$.

9. a) Beräkna linjeintegralen $\int_\Gamma yxdx + x^2dy$ från (0,0) till (1,1) längs parabeln $y = x^2$

b)Beräkna kurvintegralen $\int_\Gamma ydx - xdy$ längs $x^2 + y^2 = 1$ från (1,0) till (0,1)

c) Beräkna $\int_\Gamma \frac{xdy - ydx}{(x+y)^2}$ längs $x + 2y = 1 + y^2$ från (1,0) till (0,1) .

d) Beräkna $\int_\Gamma (x^4 - y^2)dx + (x^4 + y^2)dy$ längs parabeln $y = x^2$ från (-1,1) till (1,1) och linjen y=1 från (1,1) till (-1,1).

e) Beräkna $\int_\Gamma (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$ i positiv led runt kvadraten med hörnen $(\pm 1, \pm 1)$.

f) Beräkna $\int_\Gamma \frac{(3y - x)dx + (y - 3x)dy}{(x+y)^3}$ i positiv led från längs $x^2 + y^2 = 1$ från (1,0) till (0,1) .

g) Beräkna $\int_\Gamma (e^x \cos x - y)dx + (2xy + \arctan y^2)dy$ tagen i positiv led längs randen till området $x^2 - 3 \le y \le \frac{x^2}{4}$.

h) Beräkna $\int_\Gamma (\cos x \ln(x+y) + \frac{\sin x}{x+y})dx + (\frac{2}{4+y^2} + \frac{\sin x}{x+y})dy$ längs kurvan $\begin{cases} x = 2 - 2t^3 \\ y = 2t^2 \end{cases}$ från (2,0) till (0,2) dvs för $0 \le t \le 1$.

i) Beräkna $\int_\Gamma (y - \frac{\pi}{2}\sin y)dx + xdy$ där Γ löper från (0,0) till $(1, \frac{\pi}{2})$ längs kurvan y = arcsinx.

10. Avgör om följande funktioner är linjära. Ange i sådana fall funktionens matris.

a) $f(x,y) = (x + y, 2x + y, y)^T$ b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

11. Bestäm Jacobimatrisen till : a) $\left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \\ y &= uv \end{aligned}\right\}$

b) $\overline{f}(x,y,z) = (x^2 + yz, y^2 - x\ln z)$

12. Visa att funktionen $\mathbf{f}: \begin{cases} u = x + e^y \\ v = y - e^x \end{cases}$ är lokalt inverterbar och beräkna de partiella derivatorna $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$ svarande mot punkten (x,y)=(0,0). Beräkna även inversens Jacobimatris svarande mot denna punkt.

13. En yta definieras genom ekvationen $3xyz - z^3 = 10$. Visa att det finns en omgivning av punkten (1,3,2) där ytan kan uppfattas som en graf till en kontinuerligt deriverbar funktion z = z(x,y). Bestäm z'_x och z'_y i punkten (1,3).

14. Beräkna z''_{xy} för den funktion z=z(x,y) som i någon omgivning av punkten (1,1,1) definieras medelst ekvationen $x^3 + y^3 + z^3 + x + y + z = 6.$

15. Visa att ekvationssystemet $\begin{cases} x + y^2 + z^3 = 0 \\ x + y^3 + z^2 = 0 \end{cases}$ definierar i en omgivning av punkten (-2,1,1) precis två kontinuerligt deriverbara funktioner y=y(x) och z=z(x). Beräkna y'(-2).

Svar:

1. a) 3 b) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{8}$ c) -1

2. a) $\frac{5}{24}$ b) $\frac{37}{6}$ c) $\frac{14}{9}(\sqrt{8} - 1)$ d) $\frac{1}{10}\sin 32$ e) $\frac{16}{21}$

3. a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{2}{9}$ c) $\frac{39\pi}{8}$

4.a) $\frac{\pi^4}{3}$ b) $(e-1)\ln 2$ c) $\pi(1-\ln 2)$

5.a) $3(a-1)^2\ln a$ b) $\frac{1}{720}$ c) $\frac{1}{2}(\ln 2-\frac{5}{8})$

d) $4\pi(1-\frac{\pi}{4})$

6. a) πa^2 b) 2ln2 c) 4/3

7 a) 1/6 b) 8π c) 4/3

8. a) 1 b) $\frac{\pi^2}{8}$

9a) 3/4 b) $-\frac{\pi}{2}$ c) 1 d) $\frac{8}{5}$

e) 0 f) -2 g) –8

h) $\frac{\pi}{4}-\ln 2\sin 2$ i) $\frac{\pi}{4}$.

10a) linjär $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) ej linjär

11. a) $J=\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2x & z & y \\ -\ln z & 2y & -x/z \end{pmatrix}$

12. $x_u{}' = y_u{}' = y_v{}` = \frac{1}{2}$, $x_v{}' = -\frac{1}{2}$, $J_{f^{-1}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

13. $z_x^{'} = 6, z_y^{'} = 2.$

14. .-3/2

15. -1/5