Repetition, linjär algebra. UPPGIFTERNA 2 - 39 ÅR MATEMATIK I.

2. Bestäm de värden på a för vilka vektorerna $(1,a,a+1)$ och $(a,4,-a)$ är parallella.

3. Undersök om vektorerna $(3,0,1)$, $(0,5,0)$ och $(-2,3,4)$ ligger i samma plan.

5. Är punkterna $(3,7,-2)$, $(5,5,1)$, $(6,-2,2)$, $(4,0,-1)$ hörn i en parallellogram?

6. En cirkel med medelpunkten i $(-4,1)$ har ändpunkten till en diameter i punkten $(2,6)$. Var ligger denna diameters andra punkt?

7. För vilket värde på a kan vektorerna $(3,1,a)$, $(-1,3,4)$ och $(4,-2,-6)$ bilda sidor i en triangel?

9. Bestäm vinkeln mellan vektorerna $(1,2,3)$ och $(5,2,-3)$.

10. För vilka värden på a är vektorerna $(a,-2,1)$ och $(2a,a,-4)$ vinkelräta?

11. Bestäm en enhetsvektor i yz–planet som är vinkelrät mot vektorn $(1,2,-1)$.

12. Bestäm en vektor vars vinklar med positiva x–, y– och z–axlarna är $\pi/3$, $3\pi/4$ resp $2\pi/3$ och vars längd är 2.

13. Bestäm projektionen av vektorn $(3,3,3)$ på vektorn $(1,2,1)$.

14. Bestäm projektionen och dess längd av $(2,-3,6)$ på $(1,2,2)$.

15. Skriv vektorn $(7,-2,3)$ som en summa av två vektorer, varav den ena är parallell med $(2,2,1)$ och den andra är vinkelrät mot samma vektor.

16. Bestäm de båda enhetsvektorer som är ortogonala mot vektorerna $(2,-6,-3)$ och $(4,3,-1)$.

17. Ange ett värde på talet a så att ekvationen $(1,2,3)\times(x,y,z) = (1,a,3)$ blir lösbar.

18. En parallellogram har hörnpunkterna $(1,3,2)$, $(2,-1,1)$, $(-1,2,3)$ och $(0,-2,2)$. Sök parallellogrammens area.

19. Vektorerna $(1,-1,1)$ och $(a,0,2)$ utgör två sidor i en triangel. Bestäm a så att triangelns yta blir $= \sqrt{6}$.

20. Beräkna volymen av en parallellepiped som har en kantlinje från $(1,-4,6)$ till $(4,-1,4)$, en annan från $(4,-1,4)$ till $(2,3,4)$ och en tredje från $(2,3,4)$ till $(9,5,6)$.

21. Bestäm ekvationen för den räta linje som går genom punkterna $(1,0,-2)$ och $(4,6,2)$.

22. En rät linje går genom punkten $(0,1,2)$ och är ortogonal mot såväl vektorn $(2,-3,1)$ som vektorn $(1,4,-2)$. Angiv linjens ekvation.

Svar:

2.	$a = -2$.	3.	Nej.	5.	Ja.
6.	$(-10,-4)$.	7.	$a = -2$.	9.	$\pi/2$.
10.	$a = 2$ och $a = -1$.	11.	$\pm(0,1/\sqrt{5},2/\sqrt{5})$.	12.	$(1,-\sqrt{2},-1)$.
13.	$(2,4,2)$.	14.	$\frac{8}{9}(1,2,2)$, längd $\frac{8}{3}$.		
15.	$\frac{13}{9}(2,2,1) + \frac{1}{9}(37,-44,14)$.			16.	$\pm\frac{1}{7}(3,-2,6)$.
17.	$a = -5$.	18.	$\sqrt{107}$.	19.	$a = 4$ eller $a = -2$.
20.	100.	21.	$(1+3t,6t,-2+4t)$.	22.	$(2t,1+5t,2+11t)$.

23. Avgör om någon av punkterna $(1,4,-1)$ eller $(-1,3,-6)$ ligger på linjen $x = 3 + 2t,\ y = 5 + t,\ z = 2 + 4t$.

24. Avgör om linjerna $(x,y,z) = (2,3,7) + t(1,-1,1)$ och $(x,y,z) = (-1,2,0) + s(-1,8,6)$ skär varandra.

26. Ett plan är ortogonalt mot vektorn $(3,1,2)$ och innehåller punkten $(-3,7,4)$. Ange planets ekvation.

27. Visa att linjerna $(x,y,z) = (1,2,1) + t(3,-1,1)$ och $(x,y,z) = (2,3,0) + s(1,-1,1)$ ligger i samma plan och bestäm ekvationen för detta plan.

28. Bestäm a så att vektorn $(1,a,3)$ blir parallell med planet $x + 2y + 3z = 1$.

29. Bestäm skärningspunkten mellan planet $2x + y - 2z + 1 = 0$ och linjen $(x,y,z) = (2,3,1) + t(1,1,0)$.

30. Planen $x + 4y - 3z = 2$ och $3x - y + 2z = 3$ skär varandra längs en rät linje. Angiv linjens ekvation.

31. Sök ekvationen för den linje som går genom punkten $(1,2,1)$ och är vinkelrät mot planet $x + 2y - z = 0$.

33. Avgör om punkterna $(3,9,6)$ och $(-2,5,3)$ ligger på samma sida eller på olika sidor om planet $x - y - z + 11 = 0$.

34. Bestäm kortaste avståndet mellan planet $x + 2y + 3z = 4$ och punkten $(3,1,1)$.

35. Bestäm avståndet från det plan som går genom punkterna $(4,3,2)$, $(6,0,0)$ och $(-2,8,4)$ till punkten $(5,4,2)$.

37. Beräkna avståndet från punkten $(2,5,2)$ till linjen $(x,y,z) = (2,0,0) + t(2,1,2)$.

38. Bestäm avståndet mellan linjerna $(x,y,z) = (-1 + 2t, -3 + t, -t)$ och $(x,y,z) = (4,2,3) + s(1,5,1)$.

39. Bestäm ekvationen för den linje som går genom punkten $(1,2,3)$ och som skär linjen $(x,y,z) = (6,0,4) + t(3,-2,3)$ vinkelrätt.

53. Lös ekvationssystemet

a. $\begin{cases} 5x + 2y + 2z = 7 \\ x - y + 3z = 8 \\ 3x - y - 3z = -2 \end{cases}$. b. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ x - 2y + 3z = 5 \end{cases}$.

54. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 3x + y - 5z = 8 \\ 2x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ x - 2y + 4z = -3 \end{cases}$.

55. Ange för alla reella a lösningsmängden till ekvationssystemet

$$\begin{cases} -2x + y + 2z = 3 \\ ax + 2y + z = 1 \\ x + 3y - z = 4 \end{cases}.$$

Svar:

23. $(1,4,-1)$ nej, $(-1,3,-6)$ ja.
24. Ja.
26. $3x + y + 2z = 6$.
27. $y + z = 3$.
28. $a = -5$.
29. $(0,1,1)$.
30. $(5t, 13/5 - 11t, 14/5 - 13t)$.
31. $(1 + t, 2 + 2t, 1 - t)$.
33. På olika sidor.
34. $4/\sqrt{14}$.
35. 1.
37. $\sqrt{20}$.
38. $\sqrt{14}$.
39. $(1 + 2t, 2, 3 - 2t)$.

53a. $(1,-1,2)$.

53b. $(t, 2 - t, 3 - t)$.

54. $(1,0,-1)$.

55. $a = -1 \Rightarrow$ olösbart; $a \neq -1 \Rightarrow x = \dfrac{-20}{7(a+1)},\ y = \dfrac{11}{7},\ z = \dfrac{5a - 15}{7(a+1)}$.

56. Vad är villkoret på talet a för att ekvationssystemet $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = a \\ x - 5y + 8z = 1 \end{cases}$ skall ha någon lösning?

57. Bestäm varje värde på konstanten a för vilket det existerar en rät linje parallell med de tre planen $x + y + z = 1$, $ax + (a + 3)y + z = 2$, $5x - ay + 2z = 3$.

58. Bestäm för varje a–värde antalet lösningar till systemet

$$\begin{cases} 2ax + 3y + az = 4a \\ x + (a-1)y = a \\ x - y + z = 1 \end{cases}.$$

59. Beräkna determinanten:

a. $\det\begin{pmatrix} 12 & 7 & 32 \\ 18 & 14 & 24 \\ 6 & 7 & 16 \end{pmatrix}$ b. $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

60. Sätt $A = (1\ \ 1\ \ -3)$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Beräkna AB^T. Beräkna $(AB)^T$.

61. Bestäm inversen till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 4 & -11 & -3 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

62. Beräkna $B^{-1}A^{-1}$ då $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

63. Lös matrisekvationen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

64. A är en inverterbar 4×4–matris sådan att $A^2 + A = 0$. Bestäm A.

Svar:

56. $a = 3$.

57. $a = -2$.

58. $a \neq -1$, $a \neq 3 \Rightarrow$ en lösning; $a = -1 \Rightarrow$ ingen lösning; $a = 3 \Rightarrow$ oändligt många lösningar.

59a. 22.

59b. –9.

60. $(-6\ \ -7\ \ 4)$, $(-6,-4,5)^T$.

61. $\begin{pmatrix} -51 & 3 & 20 \\ -18 & 1 & 7 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

62. $1/4\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

63. $\begin{pmatrix} 0 & 17 & -5 \\ 1 & -9 & 4 \\ 1 & 58 & -20 \end{pmatrix}$.

64. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

84. Lös matrisekvationen $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 4 & -8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

89. Bestäm matrisen A så att $A + 2A^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

90. Bestäm matrisen A då $(A^{-1} - 2I)^T = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

91. Låt $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{pmatrix}$. Antag att $\det(A) = 3$. Beräkna $\det(2C^{-1})$ då

$$C = \begin{pmatrix} 2p & u-a & 3u \\ 2q & v-b & 3v \\ 2r & w-c & 3w \end{pmatrix}.$$

92. Visa att $\det(A + B^T) = \det(A^T + B)$ för godtyckliga $n \times n$–matriser.

93. Talen 20944, 51510, 10302, 53227 och 78404 är alla delbara med 17. Visa att detta gäller även för talet $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 9 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

94. Bestäm avståndet från punkten $P = (3,1,3)$ till linjen $(x,y,z) = (3 + 2t, 4 + 2t, -t)$ och ange den punkt på linjen som ligger närmast punkten P.

95. Kan $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 3$ om $|\boldsymbol{u}| = 2$ och $|\boldsymbol{v}| = 1$?

96. Undersök om vektorerna $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 2)$ och $(3, 1, 3)$ ligger i samma plan.

97. Bestäm en vektor vars vinklar med positiva x–, y– och z–axlarna är $\pi/3$, $3\pi/4$ resp $2\pi/3$ och vars längd är 2.

98. Bestäm alla vektorer som bildar lika stora vinklar med de tre vektorerna $(1,1,1)$, $(1,1,0)$ och $(1,0,0)$.

Svar:

84. $\begin{pmatrix} 5-2s & 2-2t \\ -3+s & 2+t \\ s & t \end{pmatrix}$.

89. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

90. $A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

91. 4/9.

94. 3 och $(1, 2, 1)$.

95. Aldrig i livet!

96. Ligger i samma plan.

97. $(1, -\sqrt{2}, -1)$.

98. $t(1, \sqrt{2}-1, \sqrt{3}-\sqrt{2})$.

Repetition, linjär algebra.

65. Ange standardmatrisen för den linjära avbildningen T, som ges av $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ x+y \\ y+z \end{pmatrix}$.

EJ

66. Bestäm en linjär avbildning T, sådan att $T(3,4) = (5,6)$ och $T(2,3) = (7,8)$.

67. För en linjär avbildning T gäller att $T(9,8,7) = (1,1,0)$ och $T(1,1,1) = (1,0,0)$. Bestäm
   a. $T(11,10,9)$.
   b. någon vektor (x,y,z) som avbildas på $(0,1,0)$.

68. Ange standardmatrisen för den linjära avbildningen T: $\mathrm{R}^3 \rightarrow \mathrm{R}^3$ som är en sammansättning av följande avbildningar:
rotation med vinkeln $\pi/6$, spegling i linjen $x = y$, expanssion i x-led med faktorn 2, skjuvning i y-led med faktorn 3.

69. Vilken är den geometriska innebörden av den linjära avbildningen som ges av matrisen $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$?

70. Skriv vektorn $(1,-2)$ i R^2 som en linjärkombination av $(2,1)$ och $(3,2)$.

71. Undersök om $(2,-1,6)$ är en linjärkombination av $(1,-2,0)$, $(0,1,2)$, $(5,-6,8)$.

72. Bestäm talet a så att $(1-a,2,0)$ och $(6,4,a+2)$ är linjärt beroende.

73. Vilka av följande vektoruppsättningar är linjärt oberoende:
   a. $(-2,0,0)$, $(8,0,-5)$, $(-1,0,3)$ b. $(1,3,-2)$, $(-3,-5,6)$, $(0,5,-6)$?

74. Undersök om vektorerna $(1,2,3)$, $(3,2,1)$, $(2,1,3)$ bildar en bas för R^3.

75. Vilka av följande vektoruppsättningar spänner upp R^3:
   a. $(1,2,3)$, $(0,2,3)$, $(0,0,3)$. b. $(1,0,2)$, $(3,0,1)$, $(5,0,-2)$, $(7,0,-4)$?

76. Bestäm egenvärden och egenvektorer till: a. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. b. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

77. Vilka av följande matriser är diagonaliserbara:
   a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. c. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. d. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. e. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Svar:

65. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 66. $\begin{pmatrix} -13x + 11y \\ -14x + 12y \end{pmatrix}$. 67a. $(3,1,0)$. 67b. $(8,7,6)$.

68. $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 3 + \sqrt{3}/2 & 3\sqrt{3} - 1/2 \end{pmatrix}$.

69. T.ex. först rotation med vinkeln $\pi/2$ och sedan skjuvning i y-led med faktorn 2.

70. $(1,-2) = 8(2,1) - 5(3,2)$. 71. Ja. 72. $a = -2$.

73. b. 74. Bildar en bas. 75. a.

76a. $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$. Motsvarande egenvektorer $(1,1)$, $(-1,1)$.

76b. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -4$. Motsvarande egenvektorer $(4,-3,0)$, $(3,4,5)$, $(3,4,-5)$.

77. a, c och d.

78. Sök en matris C sådan att $C^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}C$ är en diagonalmatris.

79. Sök en matris C sådan att $C^{-1}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}C$ är en diagonalmatris.

80. Matrisen A har egenvärden -1, 0 och 2 och motsvarande egenvektorer $(-1, 1, 0)$, $(0, 1, -1)$ resp. $(2, 1, 3)$. Bestäm A.

81. Bestäm A^{11} då $A = \begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

82. Bestäm på huvudaxelform ekvationen för kurvan
a. $11x^2 - 4xy + 14y^2 = 5$.
b. $x^2 + 6xy + y^2 = 2$.

83. Bestäm på huvudaxelform ekvationen för ytan
a. $4xy + 4xz + 4yz = 2$.
b. $3x^2 + 4xy + 2y^2 + 4xz + 4z^2 = 3$.

85. Låt $A = \begin{pmatrix}-7 & 9\\ -6 & 8\end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. Beräkna $C = B^{-1}AB$. Beräkna C^9. Beräkna A^9 med hjälp av C^9.

86. Verifiera att $\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ -2 & 0 & 8\\ 3 & 5 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 4\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\ 18\\ 5\end{pmatrix}$. Utgående från detta, bestäm a, b och c så att

$$\begin{pmatrix}4\\ 18\\ 5\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}4\\ -2\\ 3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 5\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}2\\ 8\\ -6\end{pmatrix}.$$

87. Låt $A = \begin{pmatrix}3\\ 8\\ 4\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1\\ 3\\ 1\end{pmatrix}$ och $C = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$. Verifiera att $2A - 5B = C$. Utgående från detta, lös ekvationen $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 8 & 3\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$.

88. Visa att likheten $a\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ äger rum om och endast om $a = b = c = 0$.

101. Bestäm alla k–värden så att de nedanstående vektorerna i $\mathbf{R}^4$ blir linjärt oberoende:
a. (1,1,2,0), (2,3,1,1), (3,4,3,0), (2,k,1,1).
b. (1,1,2,0), (2,3,1,1), (3,4,3,0), (1,2,1,2), (2,k,1,1).

Svar:

78. $P = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

79. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

80. $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

81. $\begin{pmatrix}2048 & -2048 & 2048\\ 2047 & -2047 & 2048\\ 2047 & -2047 & 2048\end{pmatrix}$.

82a. $3u^2 + 2v^2 = 1$.

82b. $2u^2 - v^2 = 1$.

83a. $4u^2 - 2v^2 - 2w^2 = 1$.

83b. $2u^2 + v^2 = 1$.

85. $C = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $C^9 = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 512\end{pmatrix}$, $A^9 = \begin{pmatrix}-1027 & 1539\\ -1026 & 1538\end{pmatrix}$.

86. $a = -1, b = 4, c = 2$.

87. $x = 2, y = -5$.

101. a. $k \neq 3$.
b. Alltid linjärt beroende.

102. Undersök om vektorn $\boldsymbol{v} = (5,6,3)$ kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,3,1)$ och $\boldsymbol{v}_3 = (4,5,5)$.

103. Undersök om vektorerna
a. $\boldsymbol{v}_1 = (1,2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,4)$ bildar en bas i $\mathbf{R}^2$.
b. $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,3,1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (4,5,5)$ bildar en bas i $\mathbf{R}^3$.

104. Undersök om man kan bilda en bas i $\mathbf{R}^2$ bestående av egenvektorer till matrisen $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Om så är fallet ange en sådan bas.

105. Låt $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -14 \end{pmatrix}$. Verifiera att A och B är diagonaliserbara men AB är det inte.

7.2, 7.3 i övningsboken

1–9 i http://www.math.kth.se/~bronek/amelia2/7.2.2.pdf

Svar:
102. Kan inte.
103. a. Ja. b. Nej. 104. T.ex (1,0), (0,1).