Sällsamma attraktorer (Strange Attractors)

till dynamiska system i diskret och kontinuerlig tid

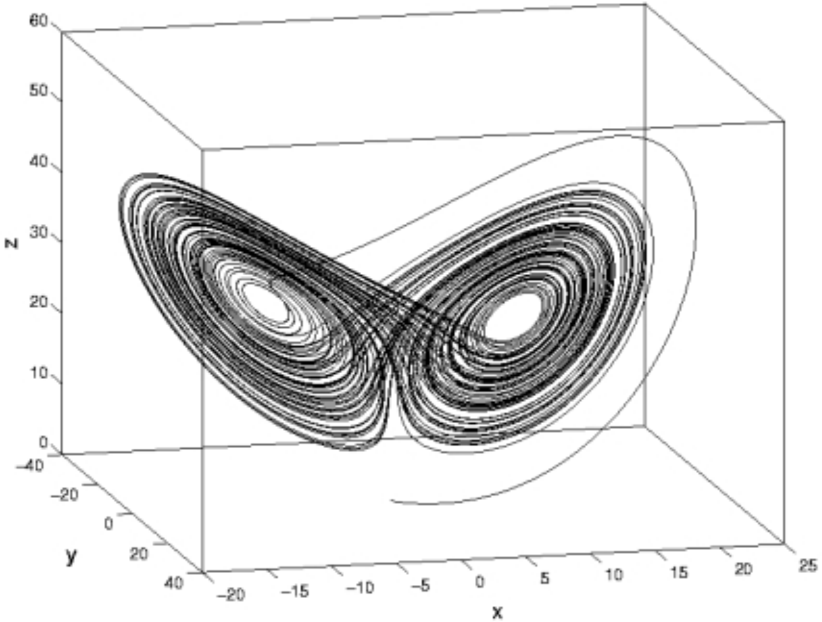
You can't know how happy I am that we met
I'm strangely attracted to you

Cole Porter, "It's allright with me"

Hans Thunberg, KTH Matematik

CL1 22 feb 2010

Lorenz-attraktorn

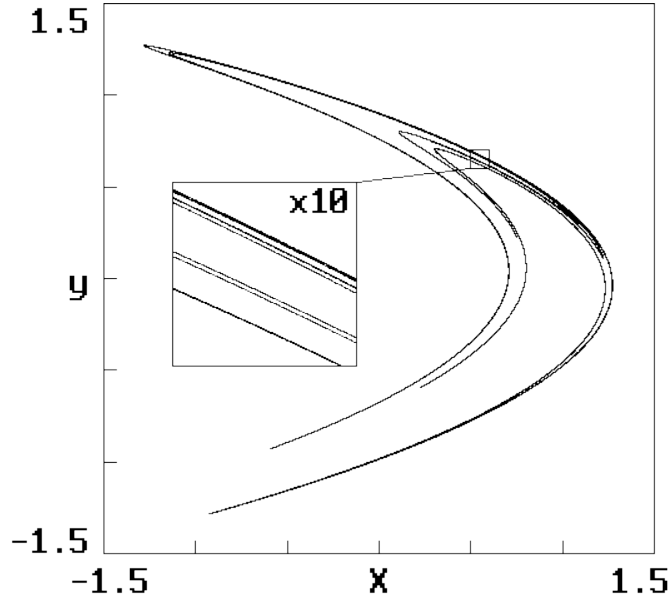


$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

ρ=28, σ = 10, β = 8/3

http://complex.upf.es/~josep/Chaos.html

Hénon-attraktorn



$$x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2,$$
$$y_{n+1} = bx_n.$$

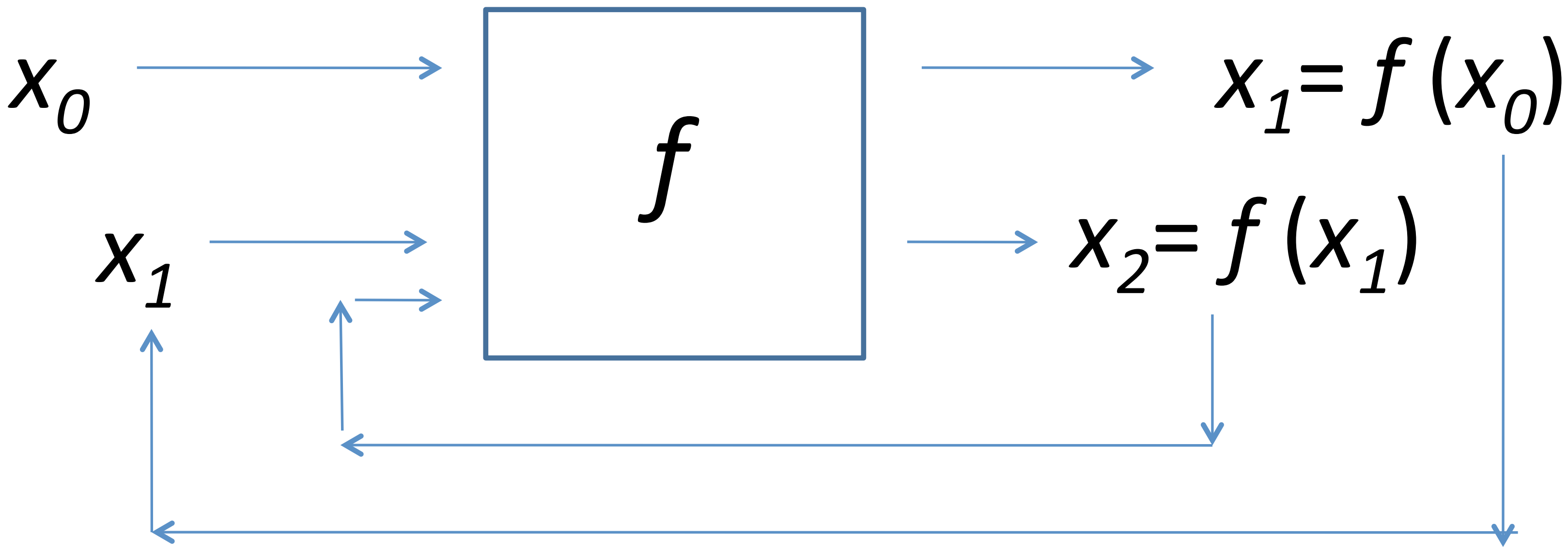
http://sprott.physics.wisc.edu/chaos/henon.gif

Kvadratiska familjen

0 1

$X_{n+1} = k\, x_n\, (1\text{-}x_n)$

Iterationer –
Diskreta dynamiska system



$$x_0 \longrightarrow x_1 = f(x_0) \longrightarrow x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) \longrightarrow x_3 \quad \ldots\ldots$$

Vad händer i det långa loppet?

Användningsområden, exempel

- Newton-Raphsons metod (ekvationslösning)

- Modellering av dynamiska förlopp:

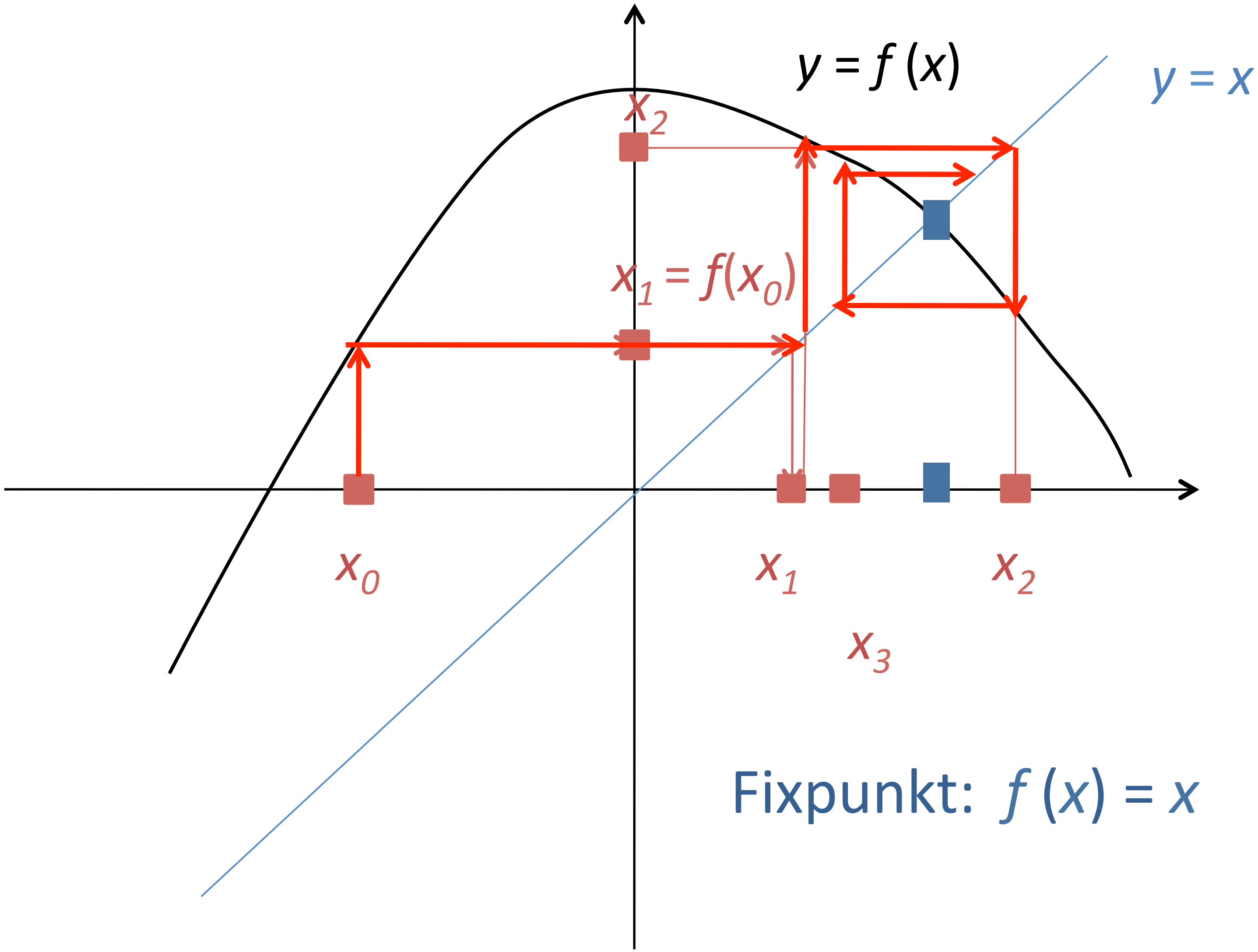
Populationsmodeller, väderprognoser …

  – x_0 är initialt tillstånd (t ex populationsstorlek)
  – f beskriver tidsutveckling
  – $x_1 = f(x_0)$ prognos för tillstånd en tidsenhet senare

  |

  – $x_n = f(x_{n-1})$ prognos för tillstånd vid tid n

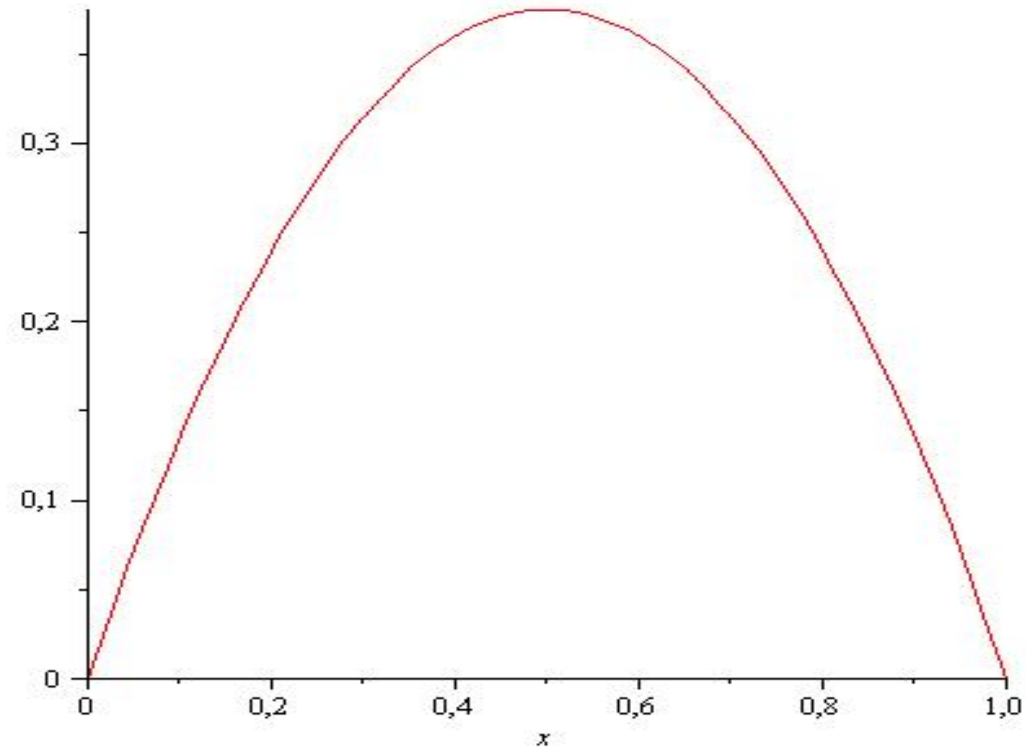
Grafisk iteration



Fixpunkt: $f\,(x) = x$

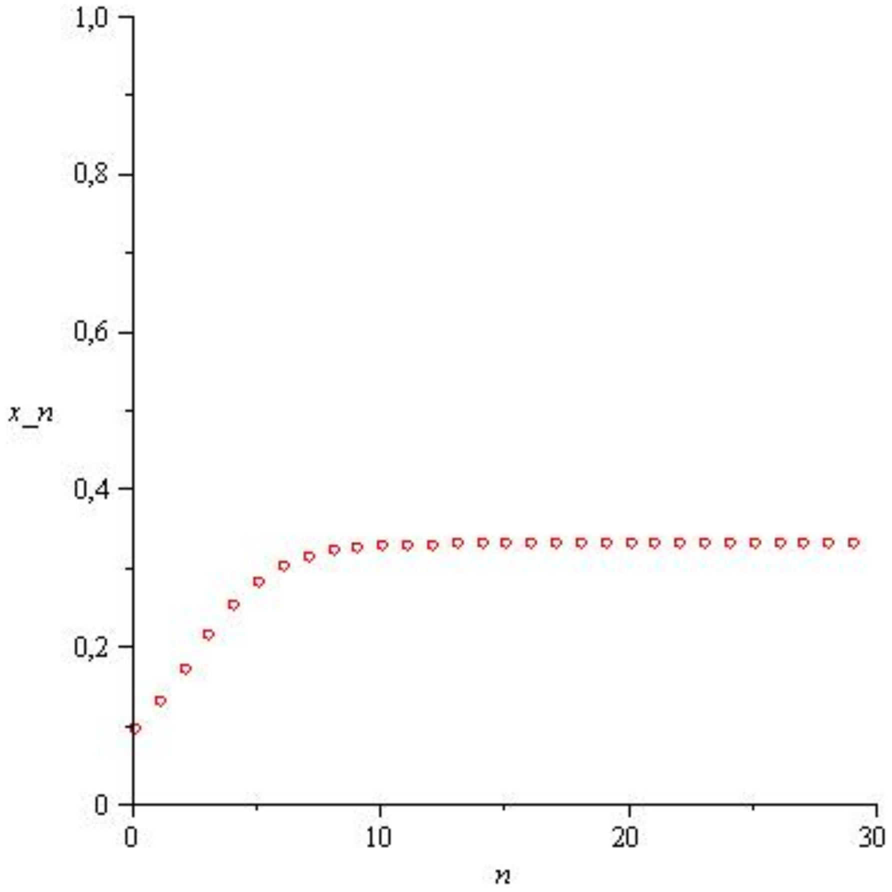
Exempel: Kvadratiska funktioner

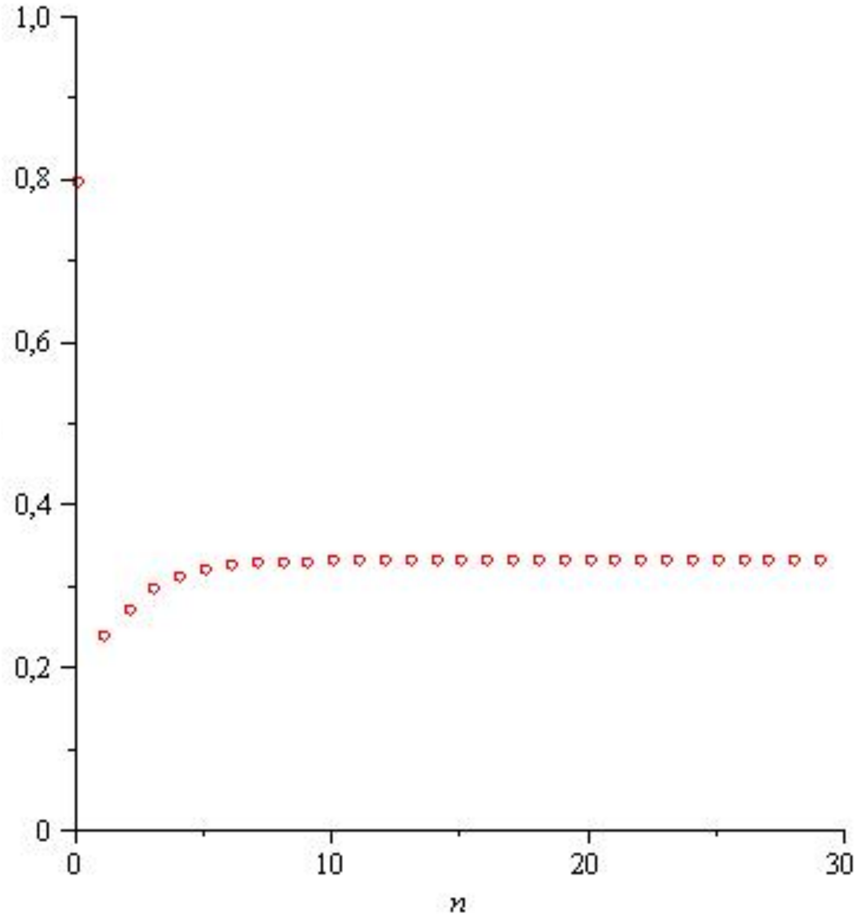
$f(x) = 1.5\,x\,(1\text{-}x)$



$f(x) = 1.5\,x\,(1-x)$

Startvärde $x_0 = 0.1$ resp $x_0 = 0.8$





$f(x) = 1.5\,x\,(1-x)$

$x = 1/3$ är en **fixpunkt**

$f(1/3) = 1/3$

och den är **en attraktor**
(den är **attraherande** eller **stabil**)

$x_n \longrightarrow 1/3$ när $n \longrightarrow \infty$

för alla startvärden x_0 nära 1/3

När är en fixpunkt attraktiv?

- $t(x) = 1 + k\,x$ har fixpunkt $x = 1/(1-k)$

(lösning till ekvationen $t(x) = x$)

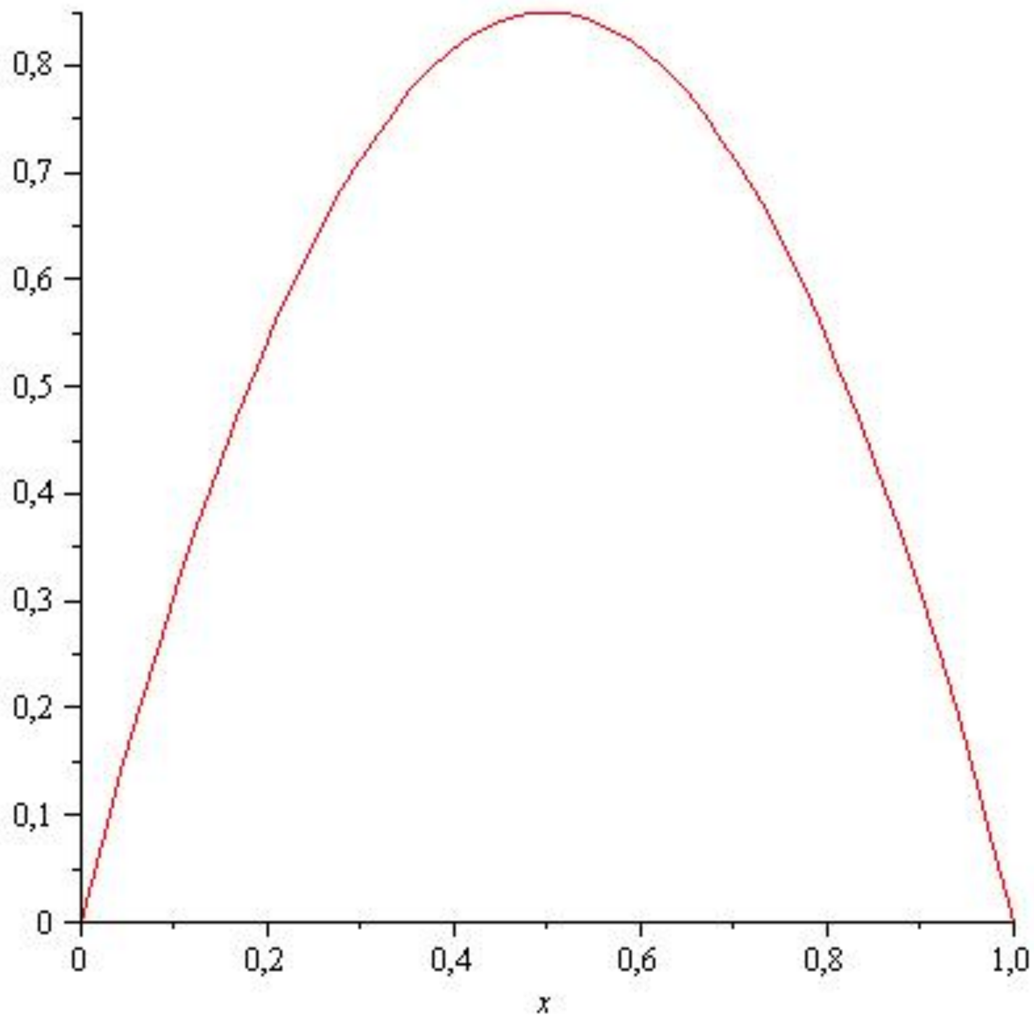
Vi undersöker attraktivitet med grafisk iteration

  – Attraktiv om $|\,k\,| < 1$. Bevis: ....

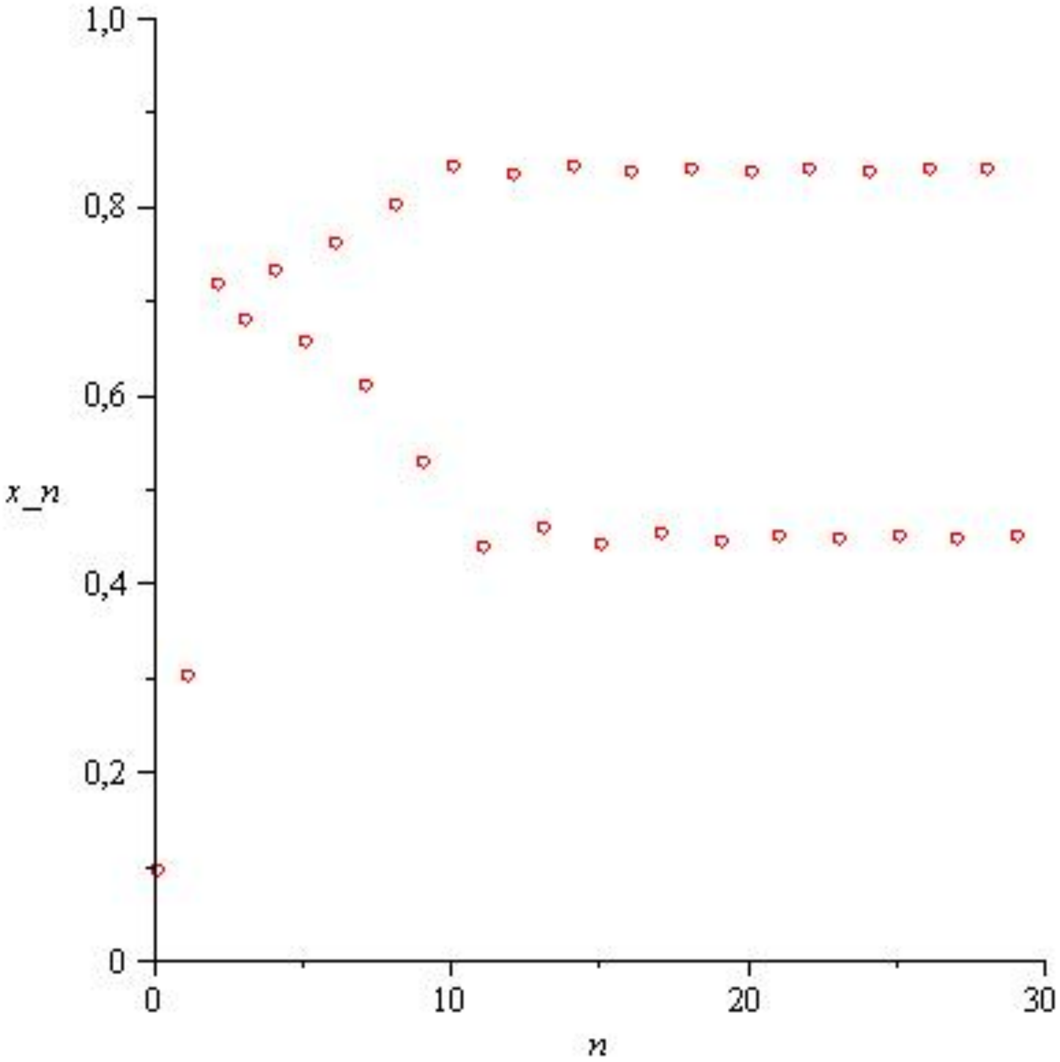
- Allmänna fallet: Om $f(x)$ har fixpunkt p , är denna attraktiv om ....?

  – Attraktiv om $|\,f\,'(p)\,| < 1$
  (Bevisas t ex med hjälp av Medelvärdesatsen)

$$f(x) = 3.4\, x\,(1-x)$$



$f(x) = 3.4\,x\,(1\text{-}x)$, $x_0 = 0.1$



$$f(x) = 3.4\,x\,(1-x)$$

har en **periodisk bana av längd 2 (2-cykel)**

$p \approx 0.45$ och $q \approx 0.84$

$f(p) = q$ och $f(q) = p$

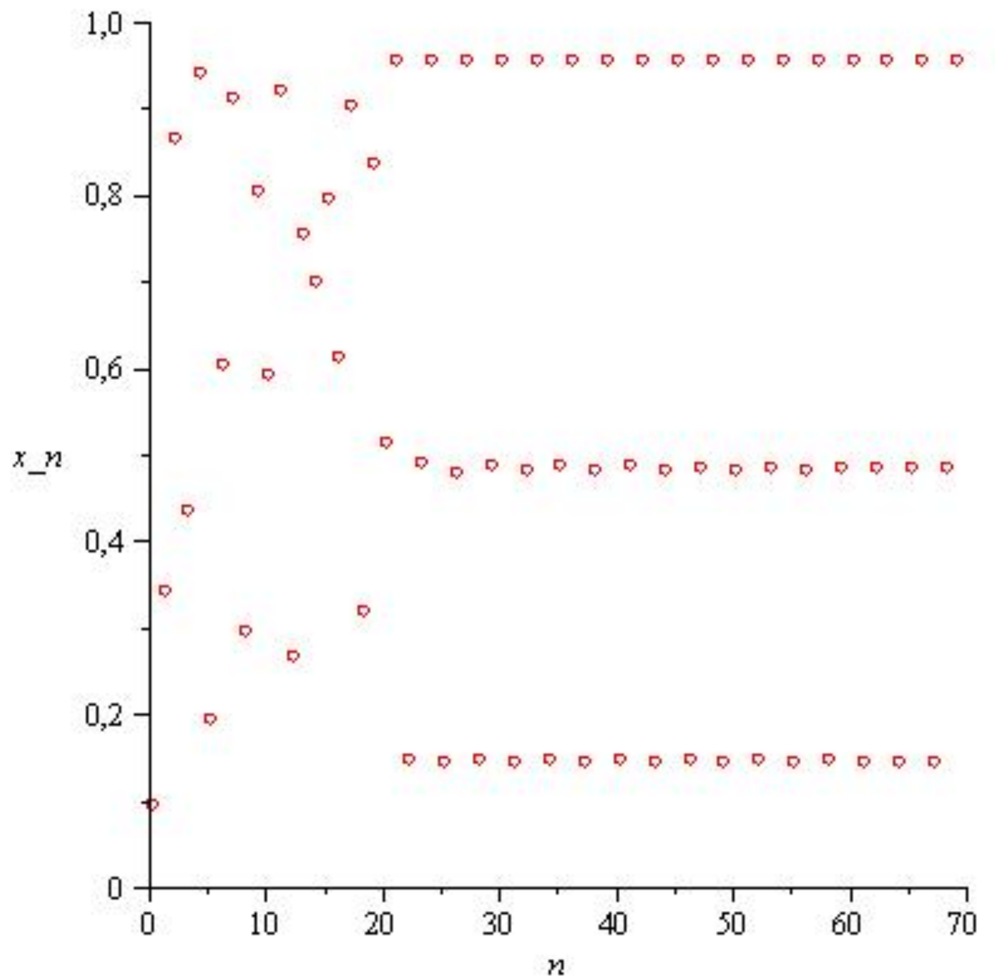
dvs $f(f(p))=p$ och $f(f(q))=q$

som är **attraktiv (stabil)**

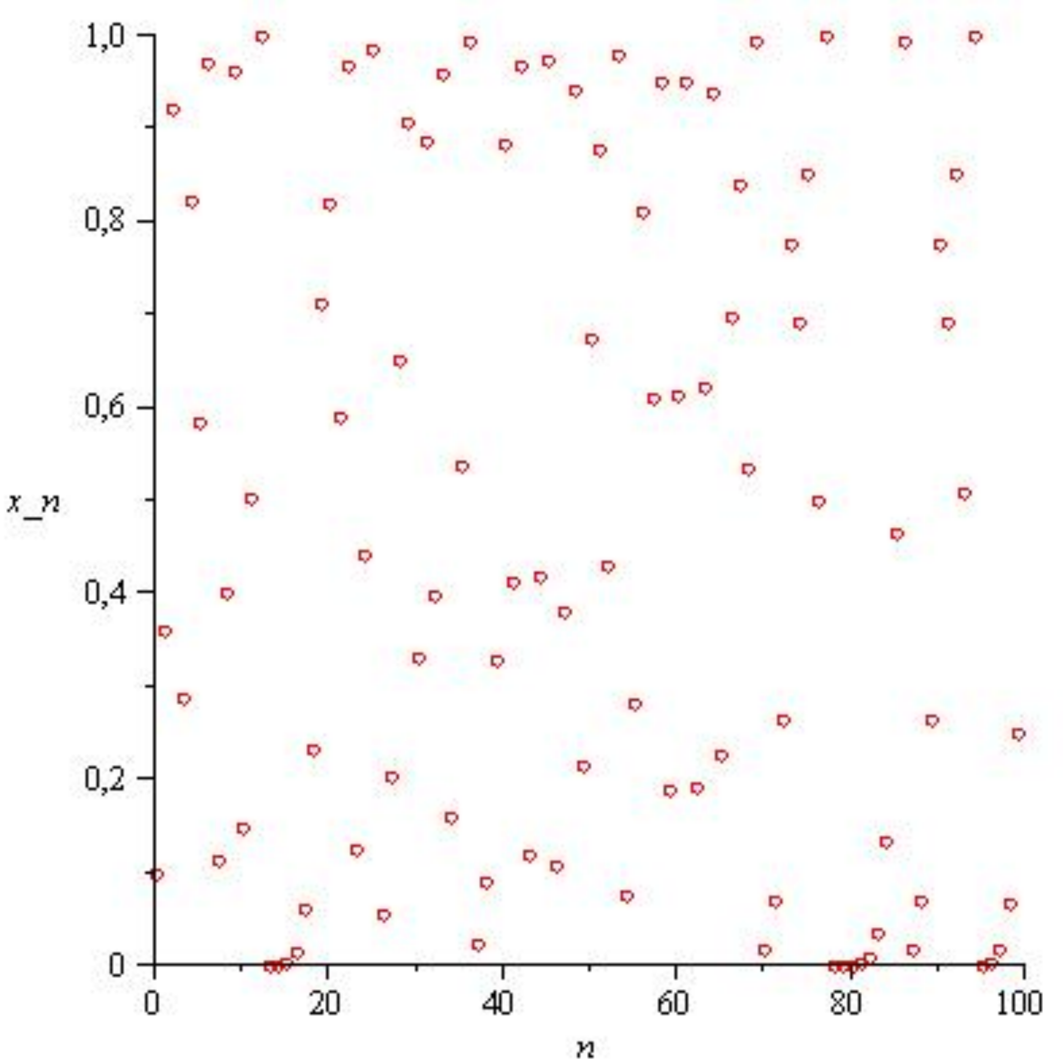
närliggande startvärden x_0 närmar sig detta periodiskt förlopp

$$x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow \ldots\ldots\ldots \longrightarrow \approx 0.45 \longrightarrow \approx 0.84 \longrightarrow \approx 0.45 \longrightarrow$$

$f(x) = 3.84\, x\,(1\text{-}x)$ har en stabil periodisk bana av längd 3 (3-cykel)



$f(x) = 4\,x\,(1-x)$ uppvisar
kaotisk dynamik på ett **attraherande interval**



- Inga attraherande periodiska banor
- Typiska banor fyller ut hela intervallet (0,1)
- Små skillnader i startvärden växer exponentiellt med antal iterationer

Attraktorer

A sägs vara en **attraktor** till en avbildning $f : I \to I$ om

- $f(A) = A$
- $\exists$ omgivning B till A sådan att
  $f^n(x) \to A$, $n \to \infty$, för alla x i B
- Ingen äkta delmängd till A har dessa egenskaper.

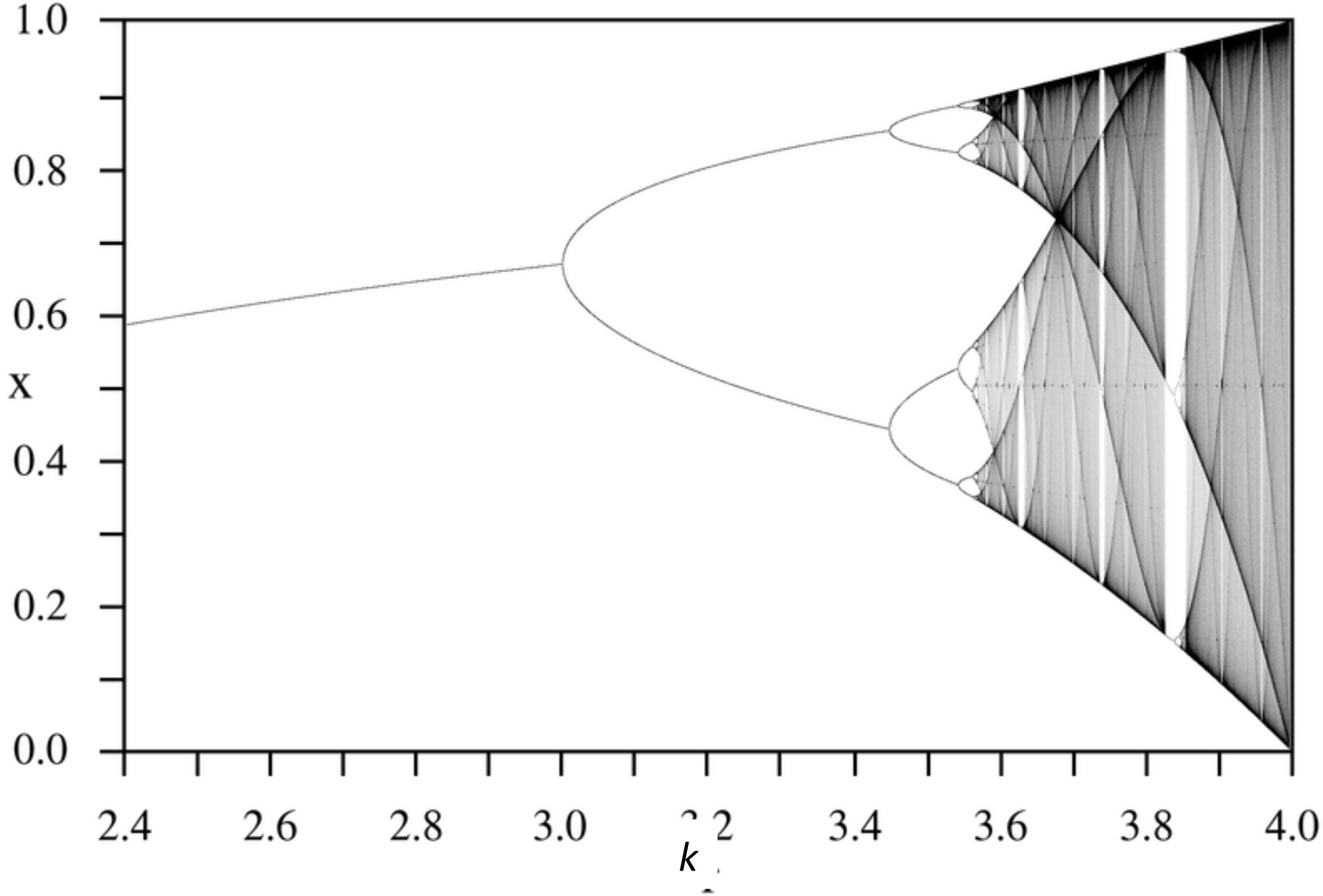
A är en **sällsam** attraktor om A dessutom

- är ”geometriskt komplicerad”
- stöder kaotisk dynamik,

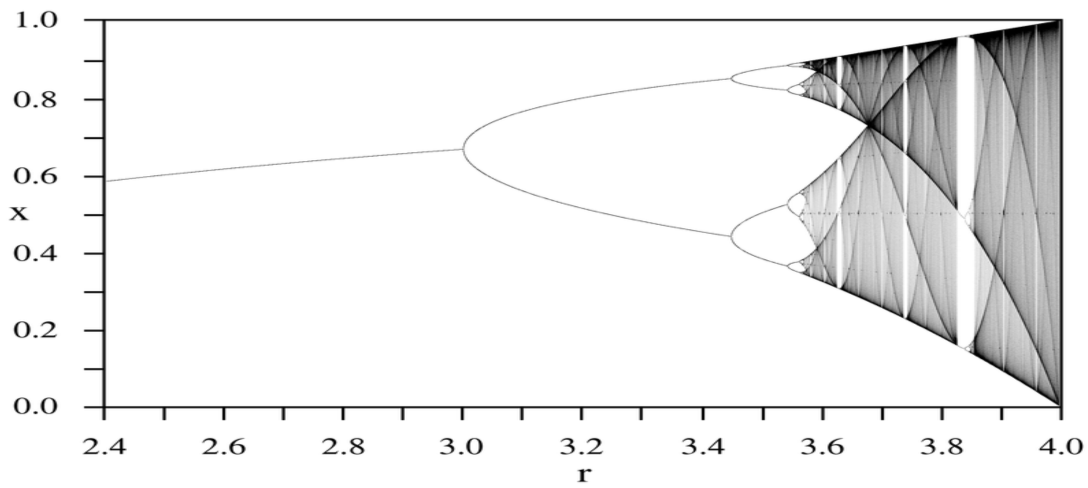
  t ex $|x_n - y_n| \sim e^n |x_0 - y_0|$

  eller $\exists\ \delta > 0$ s a $\forall\ x_0, y_0\ \exists\ N$ s a $|x_N - y_N| > \delta$

Bifurkationsdiagram för $f(x) = k\,x\,(1\text{-}x)$



Eng Wikipedia



Parametervärden *k* som ger stabila periodiska banor består av oändlig många öppna interval

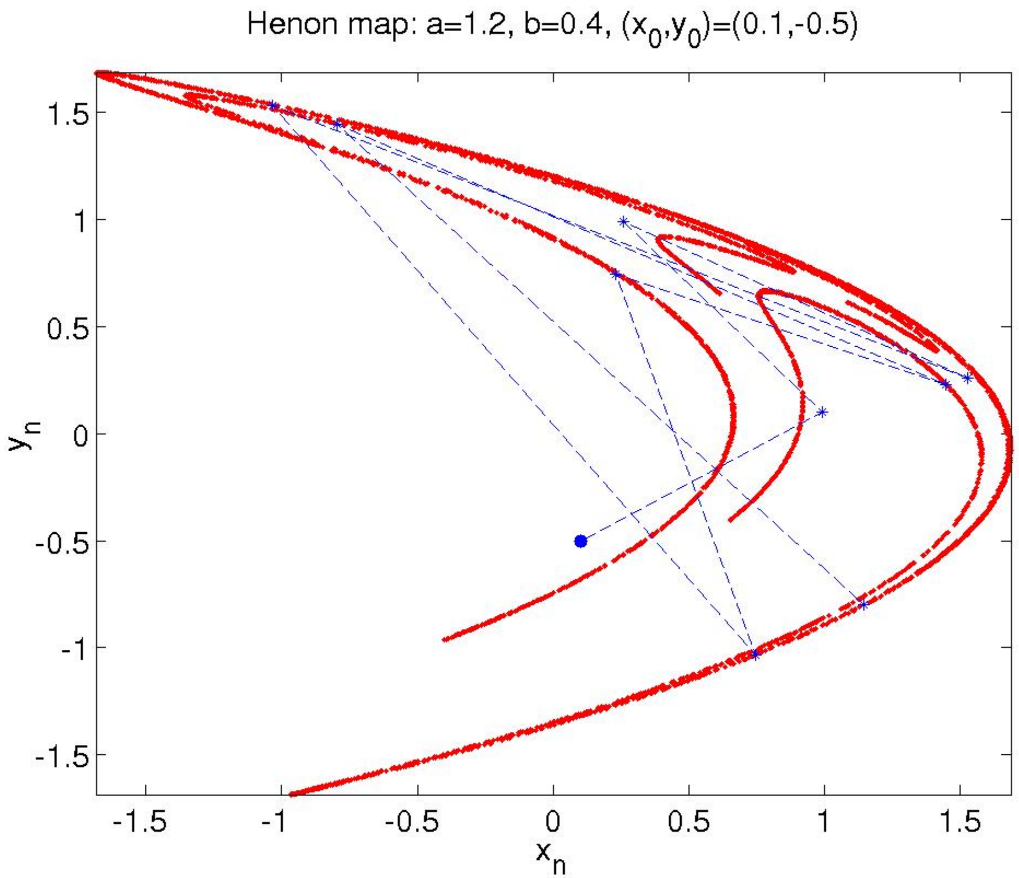
<u>Sats:</u> (Lyubich, Swiatek) Varje öppet intervall på *k*-axeln, $1 \leq k \leq 4$, innehåller *k* värden som ger attraherande periodiska banor (man säger att de utgör en *tät* delmängd)

<u>Sats:</u> (Benedicks, Carleson) Om parametervärdet *k* väljs slumpvis med likformig sannolikhet i intervallet $1 \leq k \leq 4$ har $f(x) = k\,x\,(1-x)$ en kaotisk intervallattraktor med positiv sannolikhet.

Mängden av dessa kaotiska *k*-värden innehåller inga interval, de utgör en s k Cantor mängd

Hénonavbildningen

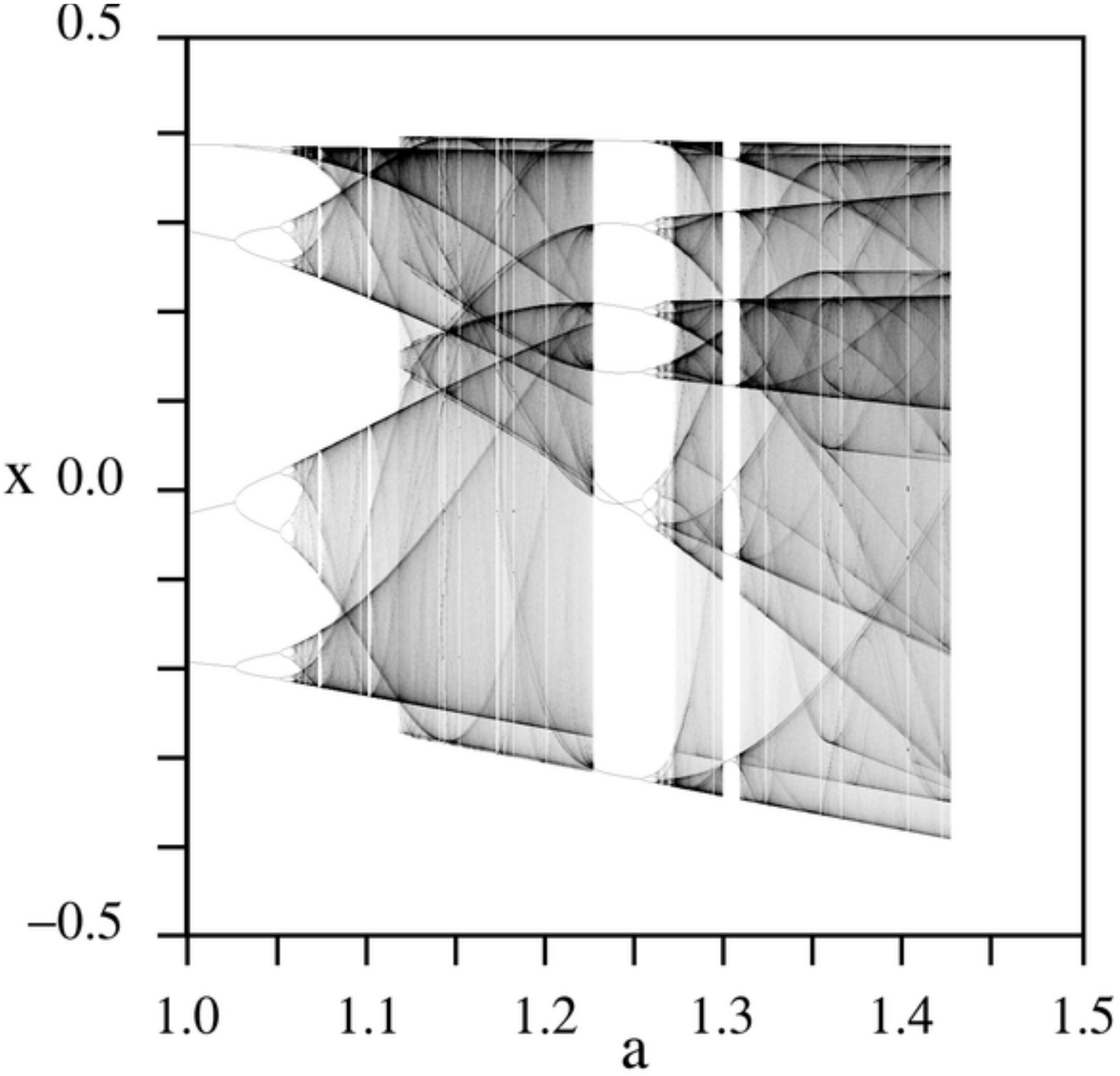
$$H_{a,b}: \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= y_n + 1 - a x_n^2, \\ y_{n+1} &= b x_n. \end{aligned}$$



a = 1.4 , b = 0.3

Eng Wikipedia

http://www-rohan.sdsu.edu/~rcarrete/teaching/M-538/lectures/codes/2D_map/pics/henon.jpg



b = 0.3

Eng Wikipedia

Exempel på Hénondynamik

http://brain.cc.kogakuin.ac.jp/~kanamaru/Chaos/e/Henon/

a = 1.25, 1.26, 1.27 … 1.3, 1.307, 1.4

b = 0.3

Hénonavbildningen

$$H_{a,b}: \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= y_n + 1 - ax_n^2, \\ y_{n+1} &= bx_n. \end{aligned}$$

SATS: (Benedicks, Carleson) För alla tilltäckligt små värden på $b > 0$ finns det en mängd

$E = E(b)$ av a-värden med positiv sannolikhet sådan att för alla a i E gäller att $H_{a,b}$ har en sällsam attraktor A.

Autonoma system av 1:a ordningens ODE (flöden) – Dynamiska system i kontinuerlig tid

$$\begin{cases} dx/dt = f(x,y,z) \\ dy/dt = g(x,y,z) \\ dz/dt = h(x,y,z) \end{cases}$$

Lösningskurvor :

$$\Phi(t,\overline{w}_0) = (x(t,\overline{w}_0), y(t,\overline{w}_0), z(t,\overline{w}_0))$$

genom initialvärde $\overline{w}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

Attraktorer

En kompakt A delmängd är en **attraktor** till $\Phi(t,w)$

- $\Phi(t, A) = A$ för alla t >0 .
- $\exists$ omgivning B till A sådan att

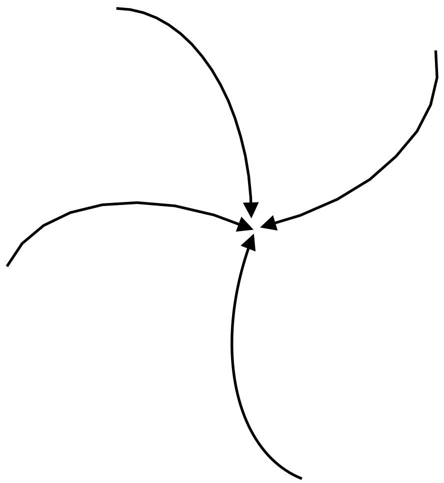
$\Phi(t,w) \to$ A , $t \to \infty$, för alla w i B

- Ingen äkta delmängd till A har dessa egenskaper.

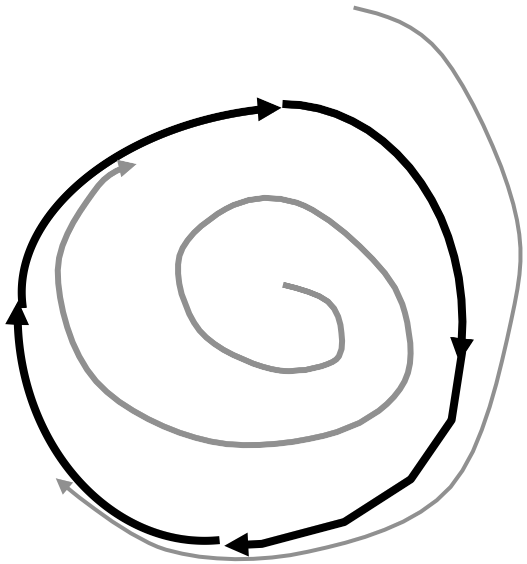
A är en **sällsam** attraktor om A dessutom

- o är ”geometriskt komplicerad”
- o stöder kaotisk dynamik,

Attraktorer till flöden



Stationära punkter



Gränscykler

Lorenz-systemet

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

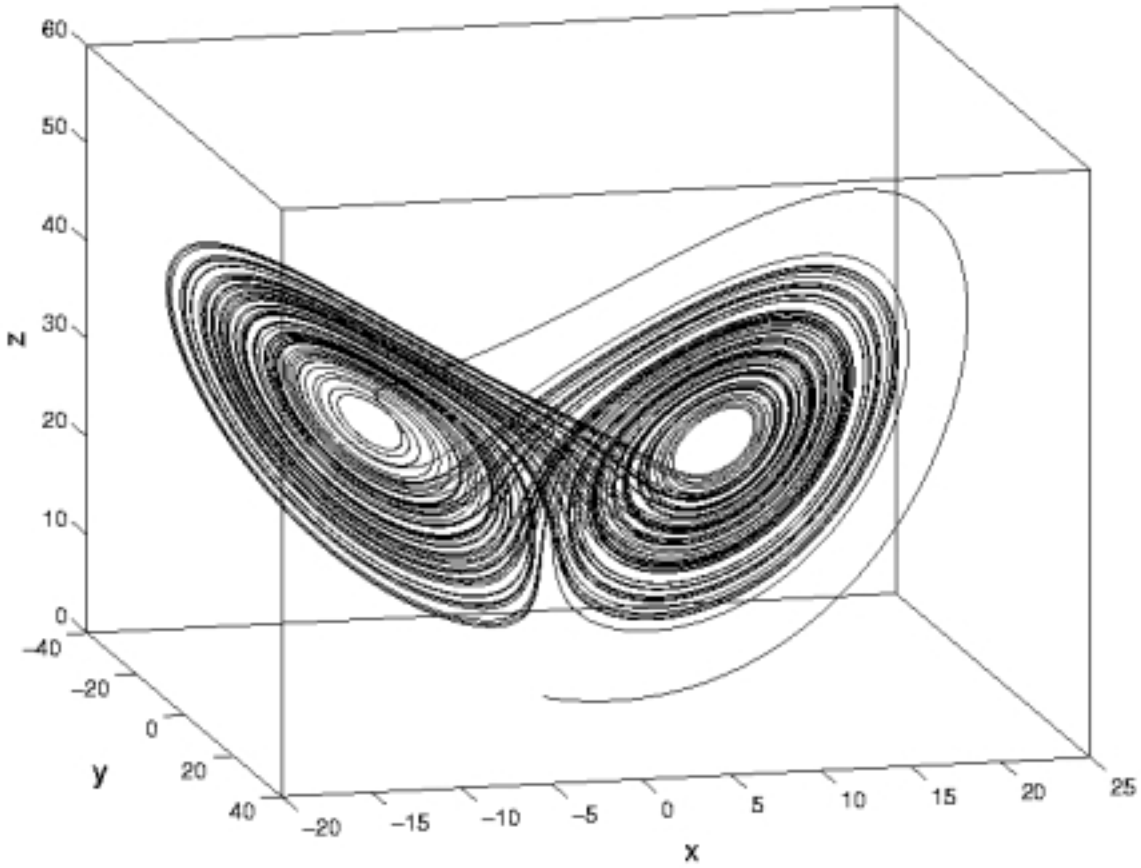
ρ=28, σ = 10, β = 8/3

Edward Lorenz (1963):

- Förenklad modell för atmosfärsdynamik

- Numeriska studier pekar på **ickeperidoiska attraktor**. Lösningar tycks ha **känsligt bereonde på intialvärde.**

Lorenzattraktorn



http://complex.upf.es/~josep/Chaos.html

Animering av Lorenzattraktorn

http://www.sat.t.u-tokyo.ac.jp/~hideyuki/java/Attract.html

Lorenzattraktorn **är** sällsam

SATS: (Tucker 1998) För en öppen mängd av parametervärden, innehållande de klassiska värdena $\rho=28$, $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, har Lorenz systemet en sällsam attraktor *A,* dvs

(i) *A* är invariant

(ii) *A* attraherar alla lösningar med intialvärden i en öppen omgivning till *A*

(iii) *A* har fraktal struktur

(iv) Dynamiken är kaotisk

(v) Lösningskurvors långtidsfördelning beskrivs av ett gemensamt sannolikhetesmått

Referenser

- Douglas Hofstadter, Mathematical chaos and strange attractors. *Scientific American,* November 1981 och i *Metamagical Themas: Qusting for the Essence of Pattern and Mind,* New York 1985
- *Iterationer,* två versioner på min hemsida www.math.kth.se/~thunberg/writings innehåller ytterligare referenser