KTH Matematik
Gunnel Roman

Tentamen i Matematik II, för CL, SF1613.

Dag och tid: Onsdag den 26 maj 2010 kl 14.00 – 19.00.

Inga hjälpmedel.

Samtliga uppgifter poängsätts med maximalt 4 poäng vardera.
Uppgifterna 1 - 5 svarar mot varsin kontrollskrivning. Godkänt på kontrollskrivning nummer j ger automatiskt 4 poäng på uppgift j (som då inte skall lösas).
Uppgifterna 6 - 8 tar upp grundläggande kunskaper och färdigheter.
Uppgifterna 9 - 11 är mer avancerade. Den som vill ha betyg C eller högre måste samla ett antal poäng på dessa uppgifter, s.k. VG-poäng.
Preliminära betygsgränser:
A - 40 poäng varav minst 8 VG-poäng
B - 36 poäng varav minst 5 VG-poäng
C - 32 poäng varav minst 2 VG-poäng
D - 29 poäng, E - 27 poäng och Fx - 25 poäng.

Lycka till!!

-------------------------Uppgifter som svarar mot varsin KS-------------------------

1. Bestäm C så att ekvationssystemet $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \\ 2x - 3y + Cz = 0 \end{cases}$ får oändligt många lösningar samt bestäm den räta linje på vilken dessa lösningar ligger.

2. Bestäm A^{1000} då $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Avgör om serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k - \sqrt{k}}$ är divergent eller konvergent.

v.g.v.

4. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ellipsoiden $F(x,y,z) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + z^2 - 1 = 0$ i punkten $(0,4,\frac{3}{5})$. Tolka även hur tangentplanet ligger i rummet.

5. Ytan på en skärgårdskobbe definieras av $z = e^{-(x^2+y^2)/8} - e^{-2}$. Hur stor volym finns ovan vatten? (xy-planet är vattenytan).

------------------------------------G-uppgifter--

6. Bestäm riktningsderivatan för funktionen $f(x,y,z) = (2x - y)e^{-xyz}$ dels i punkten $(2,0,1)$ i riktning mot origo och dels i origo i den riktning som ger maximal derivata. Ange också denna riktning.

7. Bestäm alla stationära punkter till funktionen definierad av $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ samt undersök deras karaktär.

8. Beräkna linjeintegralen $\int_C \frac{xdx + (y-1)dy}{x^2 + y^2 - 2y + 1}$ där C är kurvan $y = \sin x$ från $(0,0)$ till $(2\pi,0)$.

------------------------------------VG-uppgifter--------------------------------------

9. Beräkna integralen $\iint_D \sqrt{\frac{x-y}{x+y+1}}\,dxdy$ där D är kvadraten med hörn i $(0,0)$, $(1,-1)$, $(2,0)$ och $(1,1)$. Gör en lämplig substitution. Beskriv även hur din substitution påverkar integrationsområdet.

10. Visa att ekvationen $ze^x + y\sin z - \frac{\pi}{2} - 1 = 0$ definierar i en omgivning av punkten $(0,1,\frac{\pi}{2})$ en kontinuerligt deriverbar funktion $z = z(x,y)$. Bestäm $z''_{xy}(0,1)$.

11. Låt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

a) Ange villkoren för att matrisen A skall ha två olika reella egenvärden λ_1, λ_2.
b) Visa att $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ ($\det A$ = determinanten för A).
c) Ange minst 2 egenskaper som gör en n x n matris diagonaliserbar.