KTH Matematik
Gunnel Roman

Tentamen i Matematik II, för CL, SF1613.

Dag och tid: Tisdag den 24 augusti 2010 kl 14.00 – 19.00.

Inga hjälpmedel.

Samtliga uppgifter poängsätts med maximalt 4 poäng vardera.
Uppgifterna 1 - 5 svarar mot varsin kontrollskrivning. Godkänt på kontrollskrivning nummer j ger automatiskt 4 poäng på uppgift j (som då inte skall lösas).
Uppgifterna 6 - 8 tar upp grundläggande kunskaper och färdigheter.
Uppgifterna 9 - 11 är mer avancerade. Den som vill ha betyg C eller högre måste samla ett antal poäng på dessa uppgifter, s.k. VG-poäng.
Preliminära betygsgränser:
A - 40 poäng varav minst 8 VG-poäng
B - 36 poäng varav minst 5 VG-poäng
C - 32 poäng varav minst 2 VG-poäng
D - 29 poäng, E - 27 poäng och Fx - 25 poäng.

Lycka till!!

-------------------------Uppgifter som svarar mot varsin KS-------------------------

1. Bestäm matrisen X om $X = A^{-1} \cdot B^{-1}$ då $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ och

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Bestäm egenvärden och resp. egenvektorer till matriserna

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3. a) Bestäm definitionsmängden till $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{xy}{x^2 + y^2}}$. (2 p)

3. b) Bestäm gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 - xy - 2y^2}$. (2 p)

4. Ytorna $x^3 + 3x^2y^2 + y^3 + 4xy - z^2 = 0$ och $x^2 + y^2 + z^2 = 11$ skär varandra längs en kurva. Punkten (1,1,3) ligger på denna kurva. Bestäm på parameterform ekvationen för tangenten i denna punkt.

5. Rita integrationsområdet samt beräkna integralen $\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy}\,dx\,dy$.

-----------------------------------G-uppgifter---

6. Bestäm riktningsderivatan till $f(x,y) = x \arctan\dfrac{y}{x}$ i punkten (1,-1) i riktning mot punkten (-1,0).

7. Avgör om serien $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{n}\sin(\frac{2n-1}{2})\pi)$ är divergent eller konvergent.

8. Beräkna $\iint_D \dfrac{2x}{1+y^2}\,dx\,dy$ då $D=\{(x,y) : x^2 + y^2 \le 2, x > y^2\}$

------------------------------------VG-uppgifter---------------------------------------

9. Bestäm största och minsta värde till $f(x,y) = (3x^2 + y^2)e^{2x^2+y^2}$ på området $2x^2 + y^2 \le 1$.

10. Bestäm a så att linjeintegralen $\int_C \dfrac{2x\,dx + ay\,dy}{x^2 + 2y^2 + 1}$ blir oberoende av vägen. Bestäm därefter linjeintegralens värde med det erhållna a-värdet insatt, då C är en kurva från (1,0) till (0,1) .

11 . Låt A vara en symmetrisk $n \times n$ matris. A kallas icke-negativ (positiv) om A:s alla egenvärden är ≥ 0, positivt definit om alla egenvärden är >0.

a) Visa att om A är icke-negativ så kan vi "dra roten ur A", dvs. finna en icke-negativ symmetrisk matris B sådan att $B^2 = A$. Ledning: Diagonalisera A.

b) Bestäm en 3×3 matris B sådan att $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. (3 p)