Repetition, analys.

1. Beräkna hastigheten, farten och accelerationen vid tiden t för en partikel vars rörelse beskrivs av $\boldsymbol{r}(t) = (2\sin t + \cos t,\ 2\cos t - \sin t,\ 2t)$.

2. Beräkna längden av kurvan $\boldsymbol{r}(t) = (4t, 3\sin t, 3\cos t)$, $0 \le t \le \pi$.

3. Sök
   a. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{xy-1}{y-1}$. b. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{3x^2+4y^2}$. c. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+2xy}{3x^2+4y^2}$.

4. Bestäm alla funktioner $f(x,y)$ sådana att
   a. $f'_x = 2x\sin x^2$, $f'_y = \cos y$.
   b. $f'_x = y$, $f'_y = x + 2y$.

I uppg. 5–6 är f och g godtyckliga två gånger deriverbara funktioner av en variabel.

5. Visa att
   a. $z = f(x+y) + g(x-y)$ satisfierar ekvationen $z''_{xx} - z''_{yy} = 0$.
   b. $z = f(x^2 + xy^2)$ satisfierar ekvationen $2xyz'_x - (2x + y^2)z'_y = 0$.

6. Låt $z = xy + f\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Bestäm $x^2z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2z''_{yy}$.

7. Bestäm riktningsderivatan till funktionen $f(x,y,z) = e^{xy} + 2\arcsin z$ i punkten $(0,1,0)$ i riktning av vektorn $(-1,0,1)$. I vilken riktning växer f i $(0,1,0)$ snabbast? Vilka värden antar riktningsderivatan i $(0,1,0)$ då $\boldsymbol{u}$ är en godtycklig enhetsvektor?

8. Låt $f(x,y) = \sqrt{1 + 2x + 4y}$. Ange den riktning i vilken tillväxthastigheten av f i punkten $(4,-2)$ är minst.

9. Låt $z(x,y) = f(2x + 3y)$. Beräkna riktningsderivatan av z i punkten $(1,1)$ i riktning av vektorn $\boldsymbol{v} = (3,4)$ då $f'(5) = 4$. Vilka värden kan riktningsderivatan $z'_u(1,1)$ anta få $\boldsymbol{u}$ är en godtycklig enhetsvektor?

10. Funktionen $f(u,v)$ är differentierbar i hela $\mathbf{R}^2$. Sätt $h(x,y,z) = f(x/y, y/z)$, $y > 0$, $z > 0$. Beräkna $xh'_x + yh'_y + zh'_z$ uttryckt i u och v och partiella derivator av f.

11a. Transformera ekvationen $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ genom $u = \ln(x^2 + y^2)$, $v = \ln(x^2 - y^2)$.

11b. Transformera uttrycket $z''_{xx} - 2xz''_{xy} + x^2z''_{yy}$ genom $x = u$, $y = v - \dfrac{u^2}{2}$.

11c. Transformera ekvationen $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$ genom $x = u + v$, $y = 2u - v$.

Svar:

1. $(2\cos t - \sin t, -2\sin t - \cos t, 2)$, 3, $(-2\sin t - \cos t, -2\cos t + \sin t, 0)$.
2. 5π.

3a. finns ej.	3b. 0.	3c. finns ej.
4a. $f(x,y) = \sin y - \cos x^2 + C$.	4b. $f(x,y) = xy^2 + y$.	6. $2xy$.
7. $1/\sqrt{2}$, $(1,0,2)$, $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$.	8. $[-1,-2]$.	9. $72/5$, $[-208,208]$.
10. 0.	11a. $f'_v = 0$.	11b. $z''_{uu} + z'_v$.
11c. $2z''_{uu} + 2z''_{uv} + 5z''_{vv} = 0$.		

13. Visa att ekvationen $x^y + \sin y = 1$ definierar y som funktion av x i en omgivning av punkten $(1,0)$ och beräkna $y'(1)$.

14. Visa att det i en omgivning av origo finns en funktion $z(x,y)$ som satisfierar ekvationen $x^3 + y^3 + z^3 + x^2z - yz - z = 0$. Beräkna för denna funktion z_x' och z_y'.

15. Bestäm alla punkter på ytan $z = x^2 + 4y^2$ i vilka tangentplanet är parallellt med planet $x + y + z = 0$.

16. Bestäm ekvationen för tangentlinjen till kurvan $\boldsymbol{r}(t) = (\sin t, \cos t, \cos 2t + \sin 2t)$, $0 \le t < 2\pi$ i punkten $(0,-1,1)$.

17. Bestäm ekvationen för tangentlinjen och normalen till nivåkurvan $f(x,y) = 6$ i punkten $(2,1)$ då $f(x,y) = x^2y + xy^3$.

18. Bestäm ekvationen till tangentplanet och normalen till ytan
   a. $x^3 + y^3 + z^3 - 3z = 2$ i punkten $(1,-1,2)$.
   b. $z - 4\arctan\dfrac{y-2x}{x+z} = 3$ i punkten $(1,2,3)$.

19. Bestäm ekvationen till tangentplanet och normalen till ytan
   a. $z = x^2 - 4y^2$ i punkten $(5,2,9)$.
   b. $z = x + y + 3\arctan\dfrac{y-2x}{x+y}$ i punkten $(1,2,3)$.

20. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden till funktionen
   a. $f(x,y) = e^{x-2y}$ i punkten $(0,0)$.
   b. $f(x,y) = \ln(2x^2 + y^2) - 2y$ i punkten $(0,1)$.

21. Betrakta funktionen $f(x,y) = \sin(3x - 2y - 5)\cos(2x - 3y)$.
   a. Bestäm en linjär approximation till f i en omgivning till punkten $(3,2)$ och be räkna ett approximativ värde av $f(3.1, 2.2)$.
   b. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden till f i en omgivning till punkten $(3,2)$ och använd detta polynom för att beräkna ett approximativ värde av $f(3.1, 2.2)$.

22. Betrakta funktionen $f(x,y) = \sin(2x - y) + 2\ln(y - x)$.
   a. Bestäm en linjär approximation till f i en omgivning till punkten $(1,2)$ och be räkna ett approximativ värde av $f(1.1, 2.2)$.
   b. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden till f i en omgivning till punkten $(1,2)$ och använd detta polynom för att beräkna ett approximativ värde av $f(1.1, 2.2)$.

23. Bestäm lokala extrempunkter och deras karaktär till funktionen
   a. $f(x,y) = xy\,e^{-(x^2+y^2)/2}$.
   b. $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{8}{x} - y$.

Svar:

13. 0.
14. $z_x' = \dfrac{-3x^2 - 2xz}{3z^2 + x^2 - y - 1}$, $z_y' = \dfrac{-3y^2 + z}{3z^2 + x^2 - y - 1}$.
15. $(-1/2, -1/8, 5/16)$.
16. $(x,y,z) = (-t, -1, 1 + 2t)$.
17. $x + 2y = 4$, $2x - y = 3$.
18a. Tangentplan: $x + y + 3z = 6$. Normal: $(1,-1,2) + t(1,1,3)$.
18b. Tangentplan: $2x - y + z = 3$. Normal: $(1,2,3) + t(2,-1,1)$.
19a. Tangentplan: $10x - 16y - z = 9$. Normal: $(5,2,9) + t(10,-16,-1)$.
19b. Tangentplan: $x - 2y + z = 0$. Normal: $(1,2,3) + t(1,-2,1)$.
20a. $1 + x - 2y + x^2/2 - 2xy + 2y^2$.
20b. $-2 + 2x^2 - (y-1)^2$.
21a. $p(x,y) = -14 + 9x - 2y$. 9.5.
21b. $p(x,y) = -14 + 9x - 2y + (x-3)^2$. 9.51.
22a. $p(x,y) = y - 2$. 0.2.
22b. $p(x,y) = y - 2 - (x-1)^2 + 2(x-1)(y-2) - (y-2)^2$. 0.19.
23a. l. max. i $\pm(1,1)$, l. min. i $\pm(1,-1)$.
23b. lok. max. i $(-4,2)$.

24. Bestäm lokala extrempunkter och deras karaktär till funktionen

a. $f(x,y) = 3x^2 + 3xy + y^2 + y^3$. b. $f(x,y) = x^3y^2 + 27xy + 27y$.

c. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2$. d. $f(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z$.

25. Bestäm det största och minsta värdet av

a. $x^2 - xy + y^2 - x - y + 1$ då (x,y) varierar inom och på randen av triangeln med hörn i punkterna $(0,-1)$, $(0,1)$, $(2,0)$.

b. $x^3 + y^3 - 3y$ då $|x| \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$. c. $2x^2 + 4x - y + 5$ då $x^2 \leq y \leq 2 - x$.

d. $x + 7y$ då $x^2 + y^2 \leq 2$, $y \leq 1$. e. $x - y$ då $x^2 + y^2 \leq 10$.

f. $x + 2y$ då $x^2 + 4y^2 \leq 10$. g. $x + \sqrt{2 - x^2 - y^2}$.

h. $x + 2y + \sqrt{6 - x^2 - y^2}$.

EJ

26. Ange en minstakvadratlösning till ekvationssystemet

a. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - y = 2 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$. b. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - y = 2 \\ 2x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$.

Beräkna också medelfelet.

27. Bestäm ekvationen för den parabel $y = ax^2 + bx + c$ som i minstakvadratmening bäst anpassar till punkterna $(-3,3)$, $(-1,1)$, $(0,1)$, $(1,2)$, $(3,4)$.

28. Visa att ekvationen $x^3 + y^3 + z^3 + x + y + z = 6$ definierar i en omgivning av punkten $(1,1,1)$ precis en funktion $z = z(x,y)$. Beräkna $z''_{xy}(1,1)$.

29. Visa att ekvationen $x + y + \sin xy = 0$ definierar i en omgivning av punkten $(0,0)$ precis en strängt avtagande funktion $y = y(x)$.

30. Visa att ekvationssystemet $\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = uv \\ z = 3u - v \end{cases}$ där $u^2 + v^2 \neq 0$, definierar lokalt precis en kontinuerligt deriverbar funktion $z = z(x,y)$. Beräkna $z'_x(0,1)$ och $z'_y(0,1)$ då man vet att $z(0,1) = 2$.

31. Visa att det finns en omgivning av punkten $(x,y,u,v) = (1,1,1,1)$ i vilken ekvationssystemet $\begin{cases} 2x^2 + uy + v^2 = 4 \\ u^2 - 2uv + y^2 = 0 \end{cases}$ definierar precis en kontinuerligt deriverbar funktion

a. $u = u(x,y)$. Beräkna $u'_x(1,1)$.

b. $x = x(u,v)$. Beräkna $x'_u(1,1)$.

32. Bestäm första och andra differentialen till funktionen

a. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 3y$ i punkten $(2,1)$.

b. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - xyz - 3y$ i punkten $(2,1,0)$.

Svar:

23a. l. max. i $\pm(1,1)$, l. min. i $\pm(1,-1)$. 23b. lok. max. i $(-4,2)$.

24a. l.min. i $(0,0)$ 24b. l.max i $(-3,-1)$ 24c. lok. min i $(0,0,0)$

24d. saknas 25a. 3 och 3/28. 25b. 10 och -10.

25c. 10 och $-1/8$. 25d. 10 och 6. 25e. $2\sqrt{5}$ och $-2\sqrt{5}$.

25f. $3\sqrt{2}$ och $-3\sqrt{2}$. 25g. 2 och $-\sqrt{2}$. 25h. 6 och $-\sqrt{30}$.

26. a. $x = 2/3, y = -1/3$; 1. b. $x = 7/11, y = -4/11$; $\sqrt{1122}/33$.

27. $y = (26x^2 + 20x + 115)/100$. 28. $-3/2$. 30. $z'_x = z'_y = 1$.

31a. $-2/3$. 31b. 0.

32a. $df = 3h - 3k$, $d^2f = 2h^2 - 2hk + 2k^2$.

32b. $df = 4h - k - 2l$, $d^2f = 2h^2 + 2k^2 - 2hl - 4kl$.

33. Beräkna följande dubbelintegraler

a. $\iint\limits_{\mathbf{D}} xy\,dx\,dy$, där **D** begränsas av $y = x^2$, $y = 8x^2$, $xy = 8$.

b. $\iint\limits_{\mathbf{D}} \frac{xy}{1+y^3}\,dx\,dy$, där **D** ges av $x^2 \le y \le 1$ och $x \ge 0$.

c. $\iint\limits_{\mathbf{D}} x\,dx\,dy$, där **D** begränsas av $2x + y = 0$ och $y = x^3 - 5x^2 + 4x$.

d. $\iint\limits_{\mathbf{D}} \frac{x^{17}}{1 + x^4 + y^4}\,dx\,dy$, där **D** begränsas av kurvan $y = x^3 - x$ och x–axeln.

e. $\iint\limits_{\mathbf{D}} \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dx\,dy$, där **D** ges av $1 \le x^2 + y^2 \le 4$, $x \ge 0$ och $y \ge 0$.

f. $\iint\limits_{\mathbf{D}} \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dx\,dy$, där **D** ges av $x^2 + y^2 \le 1$ och $x + y \le 1$.

g. $\iint\limits_{\mathbf{D}} (x+y)e^y\,dx\,dy$, över triangeln med hörnen i punkterna (0,0), (1,0) och (0,1).

h. $\iiint\limits_{\mathbf{K}} xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, **K** begränsas av $z = xy$, $y = x$, $x = 1$ och $z = 0$.

i. $\iint\limits_{\mathbf{D}} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}\,dx\,dy$, **D**: $x^2 + y^2 \le 1$.

j. $\iint\limits_{\mathbf{D}} (x+y)e^{x^2-y^2}\,dx\,dy$, **D**: $|x+y| \le 1$, $0 \le x - y \le 1$.

35. Beräkna arean av det område som begränsas av

a. $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x^2$ och $8y = x^2$, $x \ge 1$.

b*. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$.

36. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av

a. $z = y^2$, $x^2 + y^2 = 1$ och $z = 0$.

b. $x^2 + z^2 = 1$, $y = 3x$ och $y = 0$.

c. $x = y^2 + z^2$, $x = 0$, $x = 1$ och $z = 1$.

d. $x = y^2 + z^2$ och $x^2 = y^2 + z^2$.

e. $x^3 = y^2 + z^2$ och $x = 2$.

f. $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$ och $z = 0$.

Svar:

33.	a.	$32\ln 2$.	b.	$\ln 2/6$.	c.	69/20.
	d.	0.	e.	$\pi/4$.	f.	$2 - \pi/2$.
	g.	1/2.	h.	1/364.	i.	$\pi/2$.
	j.	$(e - e^{-1} - 2)/2$.				
35.	a.	$\ln 2$.	b.	24π.		
36.	a.	$\pi/4$.	b.	4.	c.	4/3.
	d.	$\pi/6$.	e.	4π.	3f.	88/105.

ej

37. Beräkna arean av den del av ytan
   a. $z = x^2 - y^2$ som ligger inuti cylindern $x^2 + y^2 = 1$, $z \geq 0$.
   b. $3z = 2(x^{3/2} + y^{3/2})$ vars projektion på xy–planet är triangeln med hörnen i punkterna (0,0), (0,1) och (1,0).

38. Undersök om vektorfältet $\boldsymbol{F}$ är konservativt. Om detta är fallet så bestäm en potential.
   a. $\boldsymbol{F}(x,y) = (2x + 3y,\ 3x + 3y^2)$.
   b. $\boldsymbol{F}(x,y) = (3xy,\ x^2 + 3y^2)$.
   c. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x + y,\ xz,\ z)$.
   d. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (2xz,\ z^2,\ x + 2yz)$.
   e. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (y + z^2,\ x,\ 2xz)$.
   f. $\boldsymbol{F}(x,y) = (y + y^2,\ x + 2xy)$.
   g. $\boldsymbol{F}(x,y) = (xy + y,\ 2x - y)$.
   h. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x + z,\ 2xy,\ yz)$.

39. Beräkna följande linjeintegraler
   a. $\displaystyle\int_\Gamma \frac{x\,dx + y\,dy}{x + y}$ längs $y = 2x$ från (1,2) till (2,4).
   b. $\displaystyle\int_\Gamma (2x - y)\,dx + (x + 2y)\,dy$ från punkten (3,0) till punkten (–3,0) moturs längs cirkeln $x^2 + y^2 = 9$.
   c. $\displaystyle\int_\Gamma (x^2 + xy)\,dx + (x - xy^2)\,dy$ i positiv led runt triangeln med hörnen i punkterna (–1,0), (1,0) och (0,1).
   d. $\displaystyle\int_\Gamma (x^2 + y)\,dx + (x + y^2)\,dy$ från punkten (1,–1) till punkten (–3,3) längs kurvan $|x - y| + 2x + y = 3$.
   e. $\displaystyle\int_\Gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{(x + y)\sqrt{xy}}$ där Γ är den del av cirkeln $x^2 + y^2 = 10$, som i första kvadranten går från (3,1) till (1,3).
   f. $\displaystyle\int_\Gamma (x + y)\,dx + (y - x)\,dy + (x + y + z)\,dz$, där Γ ges av $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \sin t + \cos t$ och t går från π till 0.
   g. $\displaystyle\int_\Gamma (\sqrt{1 - x - y} + x)\,dx + (\sqrt{1 - x - y} + 2y)\,dy$, från punkten (1,0) till punkten (0,1) moturs längs cirkeln $x^2 + y^2 = 1$.
   h. $\displaystyle\int_\Gamma (x^2 + y^2)\,ds$, då Γ ges av $x = 4t - 1$, $y = 3t + 1$, $-1 \leq t \leq 1$.
   i. $\displaystyle\int_\Gamma (xy + y)\,ds$, då Γ ges av $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = 4t$, $0 \leq t \leq \pi$.
   j. $\displaystyle\int_\Gamma (2x + x^2 - 9y)\,ds$, då Γ parabelbågen $9y = x^2$ mellan punkterna (0,0) och (6,4).

Svar:

37. a. $\pi(5\sqrt{5} - 1)/12$. b. $4(1 + \sqrt{2})/15$.

38. a. konservativt, $x^2 + 3xy + y^3$. b. ej konservativt.
   c. ej konservativt. d. konservativt, $x^2z + yz^2$.
   e. konservativt, $xz^2 + xy$. f. konservativt, $xy^2 + xy$.
   g. ej konservativt. h. ej konservativt.

39. a. 5/3. b. $81\pi/2$. c. 5/6.
   d. –8. e. $\pi/3$. f. π.
   g. –1/2. h. 310/3. i. 30.
   j. 49.