

Uppgifter inför KS 5 den 14 dec 2010. Matematik I för CL. SF1623.

1. Visa följande olikheter:

a) $e^{2x} > x + e^x$, $x > 0$

b) $\sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2}$, $x > 0$

c) $e^x > 1 + x$, $x \neq 0$

2. Skissera kurvan $y = x^2 e^{-x^2}$

Beräkna integralerna:

3. a) $\int \left(x - \frac{1}{x^2}\right)^2 dx$ b) $\int_1^2 \frac{(x^4 + 2)}{x^3} dx$ c) $\int_0^5 \sqrt{3x+1} dx$

d) $\int_0^1 e^{2x} dx$ e) $\int_1^5 \frac{1}{7-x} dx$ f) $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+4} dx$

4. a) $\int_0^{\pi/6} (\sin 2x + \cos 3x) dx$ b) $\int x e^x dx$ c) $\int x^2 \cos x dx$

d) $\int x \arctan x dx$ e) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$ f) $\int_0^5 \frac{x+1}{x^2+2x+5} dx$

5. Partialbråksuppdelning följande rationella funktioner:

a) $\frac{x}{x^2-1}$ b) $\frac{x^2+6x}{(x^2+4)(x-2)}$ c) $\frac{6+8x-x^2}{x^3-3x-2}$

6. Beräkna a) $\int \frac{x^2-5x+10}{x-2} dx$ b) $\int \frac{x+8}{x^2+x-6} dx$ c) $\int \frac{x-7}{x^3-x^2-x+1} dx$

d) $\int \frac{3x^2-8}{x^3+4x^2+8x} dx$ e) $\int \frac{2x}{(x+1)^2(x-1)} dx$ f) $\int \frac{x^3+4x^2+9x+11}{x^3+x^2+4x+4} dx$

7. Beräkna a) $\int \cos^3 x dx$ b) $\int \sin^2 x dx$ c) $\int \frac{\sin x \cos x}{4 - \cos^2 x} dx$

d) $\int \frac{\sin x}{\cos x + \sin x + 1} dx$

8. Beräkna a) $\int \frac{1 + \sqrt{x+1}}{2 + \sqrt{x+1}} dx$ b) $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+3} dx$

9. Beräkna a) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + x}$ b) $\int_0^{\pi/2} x \sin 2x dx$ c) $\int_0^2 |x^2 - x| dx$

d) $\int_0^{\pi/2} \sin 2x e^{\cos x} dx$ e) $\int_1^e (\ln x)^3 dx$

10. Taylorutveckla $y = \ln x$ kring $x = 2$ t o m 4:e graden.

11. Taylorutveckla $y = e^{2x}$ kring $x = 1$ t o m 3:e graden.

12. MacLaurinutveckla följande funktioner:

a) $f(x) = e^x \sin x$ t o m grad 4

b) $f(x) = 2^x$ t o m grad 3

c) $f(x) = \sin^2 x$ t o m grad 6.

13. $y = (y + x)^2$ definierar implicit y som funktion av x så att $y(0)=1$. MacLaurinutveckla y t.o.m. 3:e graden.

Beräkna följande gränsvärden:

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{\cos x - e^x + x}$

15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + x}{\ln(1+3x)}$

16. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 \cdot \ln \frac{x+2}{x-2} - 4x^2)$

17. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^{1/x}$

18. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (x - \pi/2) \tan 3x$

19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 ax}{\cos ax - 1}$

Svar:

2.

$y=0$ är en asymptot, lok max i $(-1, 1/e)$ och $(1, 1/e)$, lok min i $(0, 0)$.

3a) $\frac{x^3}{3} - 2\ln|x| - \frac{1}{3x^3} + C$ b) $\frac{9}{4}$ c) 14 d) $\frac{e^2 - 1}{2}$ e) $\ln 3$ f) $\ln 2$

4a) $\frac{7}{12}$ b) $(x-1)e^x + C$ c) $(x^2 - 2)\sin x + 2x\cos x + C$

d) $\frac{1}{2}(x^2 + 1)\arctan x - \frac{x}{2} + C$ e) 2 f) $\frac{3}{2}\ln 2$

5a) $\frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1}$ b) $\frac{2}{x-2} + \frac{4-x}{x^2+4}$ c) $\frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{3}{x+1}$

6. a) $\frac{x^2}{2} - 3x + 4\ln|x-2| + C$ b) $2\ln|x-2| - \ln|x+3| + C$

c) $\frac{3}{x-1} + 2\ln|x-1| - 2\ln|x+1| + C$ d) $2\ln(x^2 + 4x + 8) - \ln|x| - 2\arctan\frac{x+2}{2} + C$

e) $-\frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C$ f) $x + \ln|x+1| + \ln(x^2 + 4) + \frac{3}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$

7. a) $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$ b) $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$ c) $\frac{\ln(4 - \cos^2 x)}{2} + C$

d) $\frac{1}{2}\ln(1 + \tan^2 \frac{x}{2}) + \frac{x}{2} - \ln\left|\tan \frac{x}{2} + 1\right| + C$

8. a) $x - 2\sqrt{x+1} + 4\ln(2 + \sqrt{x+1}) + C$ b) $2\sqrt{x-1} - 4\arctan\frac{\sqrt{x-1}}{2} + C$

9 a) $2\ln 2 - \ln 3$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) 1 d) 2 e) $6-2e$

10. $y(x) = \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x-2)^3}{24} - \frac{(x-2)^4}{64} + R_4(x-2)$

11. $y(x) = e^2 + 2e^2(x-1) + 2e^2(x-1)^2 + \frac{4}{3}e^2(x-1)^3 + R_3(x-1)$

12. a) $f(x) = x + \frac{2x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + O(x^4) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + O(x^4)$

b) $f(x) = 1 + x \ln 2 + \frac{x^2 \ln^2 2}{2} + \frac{x^3 \ln^3 2}{6} + O(x^4)$

c) $f(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45} x^6 + O(x^8)$

13. $y(x) = 1 - 2x - x^2 - 2x^3 + O(x^4)$

14. -1

15. 1

16. $16/3$

17. e

18. $-1/3$

19. -2