

Uppgifter inför KS 6 den 24 jan 2011. CL10.

1. Beräkna följande generaliserade integraler om de existerar:

a)  $\int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$       b)  $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$       c)  $\int_0^2 \frac{dx}{4-x^2}$

2. Avgör om följande generaliserade integraler är konvergenta eller divergenta:

a)  $\int_0^\infty \frac{x^2}{2x^4+x^3+1} dx$       b)  $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$       c)  $\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{1+x^2} dx$

3. Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av kurvorna  $y = \frac{1}{1+x^2}$  och  $y = \frac{x^2}{2}$ .

4. Bestäm arean inom kurvan  $y^2 = 4x^2 - 4x^4$ .

5. Beräkna längderna av följande kurvor:

a)  $y^2 = \frac{x^3}{9}$ ,  $0 \leq x \leq 12$  .      b)  $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 \\ y = \frac{1}{9}(6t+9)^{3/2} \end{cases}$ ,  $0 \leq t \leq 4$       c)  $r = 1 - \cos v$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$

6. Beräkna den volym som uppkommer vid rotation runt x-axeln av det område i xy-planet som bestäms av olikheterna  $0 \leq x \leq 2$  och  $x^2 \leq y \leq 2x$ .

7. Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas då ytan  $y^2 \leq (2-x)(x-1)$  roterar omkring x-axeln.

8. Bestäm de allmänna lösningarna till följande differentialekvationer:

a)  $y'' - 2y' - 3y = 0$       b)  $y'' - 2y' = 0$       c)  $y'' + y = 0$   
d)  $y'' + 2y' + 5y = 0$       e)  $y'' - 2y' + 6y = 0$       f)  $y'' + 6y' + 9y = 0$   
g)  $y''' - y' = 0$       h)  $y''' - 12y'' - 16y = 0$

9 a) Funktionen  $y(x)$  är en lösning till differentialekvationen  $y'' - 4y' + 20y = 0$ , sådan att  $y(0) = 1$ . Bestäm  $y(\frac{\pi}{2})$ .

10. a)  $y'' + 3y' + 2y = 2x^2 + x + 1$       b)  $y'' + 2y' + 10y = 2x^2 + 3x$   
 c)  $y'' + 3y' = 2x^2 + x + 1$       d)  $2y'' - 2y' + 3y = e^x$   
 e)  $y'' + 2y' + y = xe^x$       f)  $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$   
 g)  $y'' + 3y' + 2y = \sin x$       h)  $y'' + y = 4\cos x$

Svar: 1 a)  $\frac{9\pi}{4}$       b)  $\pi$       c) Existerar ej .

2 a) konvergent      b) konvergent      c) konvergent

3 a)  $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$       4.  $\frac{8}{3}$

5 a)  $\frac{112}{3}$       b) 20      c) 8      6.  $\frac{64}{15}\pi$       7.  $\frac{\pi}{6}$

8. a)  $y = Ae^{3x} + Be^{-x}$       b)  $y = Ae^{2x} + B$       c)  $y = A\cos x + B\sin x$

d)  $y = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$       e)  $y = e^x(A\cos\sqrt{5}x + B\sin\sqrt{5}x)$

f)  $y = (Ax + B)e^{-3x}$       g)  $y = A + Be^x + Ce^{-x}$       h)  $y = Ae^{4x} + (Bx + C)e^{-2x}$

9.  $e^\pi$

10. a)  $y = x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{13}{4} + Ae^{-x} + Be^{-2x}$

b)  $y = \frac{1}{5}x^2 + \frac{11}{50}x - \frac{21}{250} + e^{-x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$

c)  $y = \frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{18}x^2 + \frac{10}{27}x + A + Be^{-3x}$

d)  $y = \frac{1}{3}e^x + e^{x/2}(A\cos\frac{\sqrt{5}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{5}}{2}x)$       e)  $y = (\frac{1}{4}x - \frac{1}{4})e^x + (Ax + B)e^{-x}$

f)  $y = (\frac{1}{2}x^2 + Ax + B)e^{3x}$       g)  $y = -\frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x + Ae^{-x} + Be^{-2x}$

h)  $y = A\cos x + (2x + B)\sin x$