KTH Matematik
Gunnel Roman

Tentamen i Matematik I, del B för CL, SF1623.

Dag och tid: Måndag den 31 maj 2011 kl 8.00 – 13.00.

Inga hjälpmedel.

Samtliga uppgifter poängsätts med maximalt 4 poäng vardera.
Uppgifterna 1 - 3 svarar mot varsin kontrollskrivning. Godkänt på kontrollskrivning nummer $3 + j$ ger automatiskt 4 poäng på uppgift j (som då inte skall lösas).
Uppgifterna 4 - 6 tar upp grundläggande kunskaper och färdigheter.
Uppgifterna 7 - 10 är mer avancerade. Den som vill ha betyg C eller högre måste samla ett antal poäng på dessa uppgifter, sk VG-poäng.
Preliminära betygsgränser:
A - 35 poäng varav minst 9 VG-poäng
B - 30 poäng varav minst 7 VG-poäng
C - 25 poäng varav minst 3 VG-poäng
D - 21 poäng, E - 19 poäng och Fx - 16 poäng.

Lycka till!!

1. Avgör om funktionen $f(x) = xe^{-x^2/2}$ antar något största respektive minsta värde. Bestäm i så fall dessa.

2. Betrakta integralen $\int_1^e \frac{(\ln x)^4}{x} dx$.

   a) Använd substitutionen $u = \ln x$ för att skriva om integralen.
   b) Beräkna integralen med hjälp av omskrivningen i a) .

3. Ett plan S går genom punkterna P=(1,0,1), Q=(2,1,3) och R=(0,-1,0).

   a) Bestäm en ekvation för planet S . (2 p)
   b) Beräkna arean av triangeln PQR. (1 p)
   c) Ange en ekvation för den linje som passerar genom R och är vinkelrät mot planet S . (1 p)

-------------------------------------G – Uppgifter-----------------------------------

4. Beräkna arean av det begränsade område som innesluts av kurvorna $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$ och linjen $y = x - 2$.

5. Lös differentialekvationen $y'' + 4y' + 5y = 8\cos x$.

6. a) Bestäm Maclaurinpolynomet (Taylorpolynomet kring origo) av grad 2 till funktionen $f(x) = \ln(1+x)$.
   b) Beräkna med hjälp av svaret på uppgift a) ett närmevärde till $\ln 1.1$
   c) Avgör om ditt närmevärde har ett fel som till absolutbeloppet är mindre än 0.001 .

-------------------------------------VG-uppgifter---

7. Beräkna längden av kurvan $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $0 \le x \le 1$. Om du väljer att räkna ut en integral, förklara varför integralen ger längden av kurvan!

8- Skissera kurvan $y = (x^2 - 2)e^{-2x}$. Bestäm eventuella nollställen, lokala max och min samt asymptoter.

9. a) Låt C vara en cirkel kring origo i xy-planet med radie R . Låt $P:(x_0, y_0)$ vara en punkt på C. Visa att cirkelns tangent i punkten P har ekvationen $xx_0 + yy_0 = R^2$.
   b) Låt E vara ellipsen $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ och låt $P:(x_0, y_0)$ vara en punkt på E.
   Visa att ellipsens tangent i punkten P har ekvationen $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$.

10. a) Låt $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, för $x \neq 0$ och $f(0) = c$. Hur skall konstanten c väljas för att f ska bli kontinuerlig i $x = 0$?
    b) Om c väljs som i uppgift a) , finn $f'(0)$ och $f''(0)$.