KTH Matematik
Gunnel Roman

Tentamen i Matematik I, del B för CL, SF1623.

Dag och tid: Måndag den 31 jan 2011 kl 14.00 – 19.00.

Inga hjälpmedel.

Samtliga uppgifter poängsätts med maximalt 4 poäng vardera.
Uppgifterna 1 - 3 svarar mot varsin kontrollskrivning. Godkänt på kontrollskrivning nummer 3 + j ger automatiskt 4 poäng på uppgift j (som då inte skall lösas).
Uppgifterna 4 - 6 tar upp grundläggande kunskaper och färdigheter.
Uppgifterna 7 - 10 är mer avancerade. Den som vill ha betyg C eller högre måste samla ett antal poäng på dessa uppgifter, sk VG-poäng.
Preliminära betygsgränser:
A - 35 poäng varav minst 9 VG-poäng
B - 30 poäng varav minst 7 VG-poäng
C - 25 poäng varav minst 3 VG-poäng
D - 21 poäng, E - 19 poäng och Fx - 16 poäng.

Lycka till!!

1. a) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \to -\infty} 2x + \sqrt{4x^2 + 3x - 2}$. (2 p)

   b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x^2 \cot 3x}$. (2 p)

2. Beräkna integralen $\int \frac{\ln(x+3)}{x^2} dx$.

3. Vektorerna $\bar{a}$ och $\bar{b}$ är sådana att $\bar{a} \cdot \bar{a} = 8$, $\bar{b} \cdot \bar{b} = 9$ och vinkeln mellan $\bar{a}$ och $\bar{b}$ är $\frac{3\pi}{4}$. Vilken är den vinkelräta projektionen av vektorn $4\bar{a} + 5\bar{b}$ på vektorn $\bar{a}$?

-------------------------------------G – Uppgifter-------------------------------------

4. Beräkna integralen $\int \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

5. Lös differentialekvationen $y'' + y' = 2\sin x$ då $y(0) = 0$ och $y'(0) = -3$.

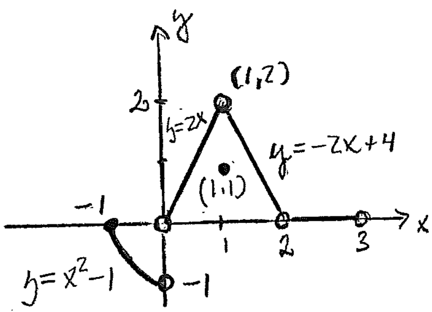
6. Visa att $\arctan\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2} + x \geq 0$ för $x>0$.

-------------------------------------VG-uppgifter-------------------------------------

7. Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & -1 \leq x < 0 \\ 2x & 0 < x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ -2x + 4 & 1 < x < 2 \\ 0 & 2 < x < 3 \end{cases}$$

har grafen



a) (i) Existerar $f(-1)$? (ii) Existerar $\lim_{x\to -1^+} f(x)$?
(iii) Är $\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$? (iv) Är f kontinuerlig då $x = -1$?

b) (i) Existerar $f(1)$? (ii) Existerar $\lim_{x\to 1} f(x)$? (iii) Är $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$?,
(iv) Är f kontinuerlig då $x = 1$?

c) (i) Är f definierad då $x = 2$? (ii) Är f kontinuerlig då $x = 2$?

d) För vilka x-värden är f kontinuerlig?

8. Bestäm avståndet mellan de två planen med ekvationerna
$6x - 3y + 6z + 2 = 0$ och $2x - y + 2z + 4 = 0$.

9. Bestäm konstanterna a, b, c och d i funktionen $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ så att motsvarande kurva går genom origo och har lokal maximipunkten (-1,1) och så att tangenten till kurvan i origo går genom maximipunkten (-1,1). Rita därefter kurvan.

10. Taylorutveckla omkring $x = 2$ till och med andragradstermen den funktion $y(x)$ som definieras av ekvationen $y^3 + y = x$ och som uppfyller $y(2) = 1$.

1a) $$\lim_{x\to-\infty} 2x+\sqrt{4x^2+3x-2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{(2x+\sqrt{4x^2+3x-2})(2x-\sqrt{4x^2+3x-2})}{2x-\sqrt{4x^2+3x-2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-(4x^2+3x-2)}{2x-\sqrt{4x^2+3x-2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-3x+2}{2x-|2x|\sqrt{1+\frac{3}{2x}-\frac{2}{4x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-3x+2}{2x+2x\sqrt{1+\frac{3}{2x}-\frac{1}{2x^2}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x(-3+\frac{2}{x})}{x(2+2\sqrt{1+\frac{3}{2x}-\frac{1}{2x^2}})}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-3+\frac{2}{x}}{2+2\sqrt{1+\frac{3}{2x}-\frac{1}{2x^2}}} = \frac{-3+0}{2+2\sqrt{1+0-0}} = -\frac{3}{4}$$

SVAR! $-\frac{3}{4}$

b) $$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x^2\cot 3x} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x^2\cdot\frac{\cos 3x}{\sin 3x}} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\sin 3x}{x^2\cos 3x} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{3\sin 3x}{3x}\cdot\frac{1}{\cos x\cdot\cos 3x} = 1\cdot3\cdot1 = 3$$

SVAR! 3

2. $$\int\frac{\ln(x+3)}{x^2}\,dx = \left|\text{PART. INT}\right| = -\frac{1}{x}\cdot\ln(x+3) -$$

$$-\int\left(-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+3}\right)dx = -\frac{1}{x}\ln(x+3) + \underbrace{\int\frac{1}{x(x+3)}\,dx}_{I}$$

$$\frac{1}{x(x+3)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+3} = \frac{Ax+3A+Bx}{x(x+3)} = \frac{(A+B)x+3A}{x(x+3)}$$

x! $A+B=0$

x^0! $3A=1 \iff A=\frac{1}{3} \Rightarrow B=-\frac{1}{3}$

$$I=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)dx = \frac{1}{3}(\ln|x|-\ln|x+3|)+C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+C$$

SVAR! $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right| - \frac{1}{x}\ln|x+3| + C.$

3. $\bar{a}\cdot\bar{a} = 8 \qquad \bar{b}\cdot\bar{b} = 9 \qquad \theta = \frac{3\pi}{4}$

$\bar{a}\cdot\bar{a} = |\bar{a}|^2 = 8 \iff |\bar{a}| = \sqrt{8}, \qquad |\bar{b}| = \sqrt{9} = 3$

$$\text{PROJ}_{\bar{a}}(4\bar{a}+5\bar{b}) = \left(\frac{(4\bar{a}+5\bar{b})\cdot\bar{a}}{|\bar{a}|^2}\right)\bar{a} \quad *$$

$(4\bar{a}+5\bar{b})\cdot\bar{a} = 4\,\bar{a}\cdot\bar{a} + 5\,\bar{b}\cdot\bar{a}$

$\bar{b}\cdot\bar{a} = |\bar{b}|\cdot|\bar{a}|\cdot\cos\frac{3\pi}{4} = 3\cdot\sqrt{8}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3\cdot 2\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$

$= -6.$

$$* \quad \text{PROJ}_{\bar{a}}(4\bar{a}+5\bar{b}) = \left(\frac{4\cdot 8 + 5\cdot(-6)}{8}\right)\bar{a} = \frac{32-30}{8}\bar{a} = \frac{1}{4}\bar{a}$$

SVAR: $\frac{\bar{a}}{4}$

---

4. $$I = \int \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx + \int \frac{3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{4-x^2} = t \\ 4-x^2 = t^2 \\ -2x\,dx = 2t\,dt \\ x\,dx = -t\,dt \end{array} \right| = \int \frac{-t\,dt}{t} = \int -dt$$

$$= -t + C_1 = -\sqrt{4-x^2} + C_1$$

$$I_2 = \int \frac{3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = 2t \\ dx = 2dt \end{array} \right| = \int \frac{3\cdot 2\,dt}{\sqrt{4-4t^2}} =$$

$$= \int \frac{3\cdot 2\,dt}{2\sqrt{1-t^2}} = 3\arcsin t + C_2 = 3\arcsin\frac{x}{2} + C_2$$

SVAR: $I = I_1 + I_2 = \underline{-\sqrt{4-x^2} + 3\arcsin\frac{x}{2} + C}$

---

5. $y'' + y' = 2\sin x \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = -3$

HOMOGENE LÖSN.: $y'' + y' = 0$

KAR. EKV. $k^2 + k = 0 \iff k(k+1) = 0$

$k = 0,\ k = -1$

$y_h = Ae^0 + Be^{-x} = A + Be^{-x}$

PART. LÖSN.: SÄTT $y = a\cos x + b\sin x$

$y' = -a\sin x + b\cos x$

$y'' = -a\cos x - b\sin x$

INSATT GER DET: $-a\cos x - b\sin x - a\sin x + b\cos x \equiv 2\sin x$

$\sin x$: $-b - a = 2$

$\cos x$: $-a + b = 0 \iff b = a$

$b = a$ GER $-2a = 2$ OCH $a = b = -1$

$y_p = -\cos x - \sin x.$

$y = A + Be^{-x} - \cos x - \sin x.$, $y' = -Be^{-x} + \sin x - \cos x$

$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = A + B - 1 \iff A = 1 - B$

$y'(0) = -3 \Rightarrow -3 = -B - 1 \iff B = 2$

$B = 2$ GER $A = -1$ $\therefore$ $y = 2e^{-x} - 1 - \cos x - \sin x.$

SVAR: $y = 2e^{-x} - 1 - \cos x - \sin x.$

---

6. VISA $\arctan \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2} + x \geq 0,\ x > 0$

$f(x) = \arctan \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2} + x$

VISA $f(x) \geq 0.$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} + 1 = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 = \frac{-1}{x^2+1} + 1$$

FORTS.

6. FORTS.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2+1} + 1 = \frac{-1+x^2+1}{x^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1} > 0 \text{ DÅ } x>0$$

∴ $f(x)$ VÄXER DÅ $x>0$. MINSTA VÄRDET ÄR

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \arctan\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2} + x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 0 = 0$$

∴ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ OCH f VÄXER $\Rightarrow f(x) \geq 0$. VSV

7.

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & -1 \leq x < 0 \\ 2x & 0 < x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ -2x+4 & 1 < x < 2 \\ 0 & 2 < x < 3 \end{cases}$$

a) i) $f(-1)$ EXISTERAR, JA
TY -1 TILLHÖR INTERVALLET $-1 \leq x < 0$

ii) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ EXISTERAR, JA

iii) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 0 = f(-1)$ JA

iv) f ÄR KONT. DÅ $x=-1$,
EFTERSOM iii) SANN JA

b) i) $f(1)$ EXISTERAR, JA EFTERSOM $f(x)=1$ DÅ $x=1$

ii) $\lim_{x\to 1} f(1)$ EXISTERAR TY $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ OCH $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ EXISTER.

iii) NEJ, $f(1)=1$, MEN $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$

iv) NEJ $f(1) \neq \lim_{x\to 1} f(x)$

c) i) f ÄR EJ DEF DÅ $x=2$, NEJ $x=2$ FINNS EJ MED I D_f

ii) f ÄR EJ KONT DÅ $x=2$, NEJ SE i)

d) $-1 \leq x < 0$, $0 < x < 1$, $1 < x < 2$, $2 < x < 3$.

8. $\Pi_1: \; 6x-3y+6z+2=0 \qquad \bar{n}_{\Pi_1}=(6,-3,6)=3(2,-1,2)$

$\Pi_2: \; 2x-y+2z+4=0 \qquad \bar{n}_{\Pi_2}=(2,-1,2)$

$\bar{n}_{\Pi_1} \parallel \bar{n}_{\Pi_2}$!! PLANEN ÄR PARALLELLA.

VÄLJ EN PUNKT PÅ t.ex. Π_2 $\quad P_0=(1,2,-2)=(x_0,y_0,z_0)$

AVSTÅND PUNKT – PLAN : $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

AVSTÅNDET P_0 TILL Π_1 :

$$d=\frac{|6\cdot 1-3\cdot 2+6\cdot(-2)+2|}{\sqrt{6^2+(-3)^2+6^2}}=\frac{|6-6-12+2|}{\sqrt{36+9+36}}=\frac{10}{9}$$

SVAR: $\frac{10}{9}$ l.e

OBS! 10. $\quad y^3+y=x \qquad y(2)=1$

TAYLORUTV. KRING $x=2$

$$f(x)=f(2)+f'(2)\cdot(x-2)+\frac{f''(2)\,(x-2)^2}{2!}+R_2(x-2)$$

$f(x)=y(x) \qquad f(2)=y(2)=1$

$\frac{dy}{dx}$: $\quad 3y^2\cdot y'+y'=1$

$y'(3y^2+1)=1 \iff y'=\dfrac{1}{3y^2+1}$

$y'(2)=\dfrac{1}{3\cdot 1^2+1}=\dfrac{1}{4} \qquad f'(2)=\frac{1}{4}$

$\frac{d^2y}{dx^2}$: $\quad y''(3y^2+1)+y'\cdot(6y\cdot y')=0$

$y''=\dfrac{-y'6y\cdot y'}{3y^2+1} \qquad y''(2)=\dfrac{-\frac{1}{4}\cdot 6\cdot\frac{1}{4}}{3+1}=-\dfrac{3}{32}$

$f''(2)=\dfrac{-3}{32}$

SVAR: $y(x)=1+\frac{1}{4}(x-2)-\frac{3}{64}(x-2)^2+R_2(x-2)$

9: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (0,0) PUNKT PÅ KURVAN
(−1,1) LOKAL MAXP.

$(0,0) \Rightarrow 0 = d$ ∴ $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

$(-1,1) \Rightarrow 1 = -a + b - c$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $f'(-1) = 0$ GER

$3a - 2b + c = 0$

$f''(x) = 6ax + 2b$ $f''(-1) = 2b - 6a < 0$

TANGENTEN I (0,0) ∴ $k_T = f'(0) = c$

$y = cx$ ÄR TANGENT.

(−1,1) SAT. TANGENTEN $\Rightarrow 1 = -c$

$$\therefore \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \begin{cases} -a + b - c = 1 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ c = -1 \end{cases}$$

III INSATT I I OCH II : $\begin{cases} -a + b + 1 = 1 \\ 3a - 2b - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = a$

$b = a$ INSATT I $3a - 2b - 1 = 0$ GER

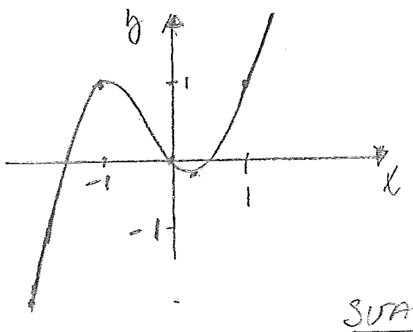
$3a - 2a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1 = b$ $(f''(-1) = 2 - 6 < 0)$

∴ $f(x) = x^3 + x^2 - x$ $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{2x}{3} - \frac{1}{3} = 0$ $x = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}}$

$x = -\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}$: $x = \frac{1}{3}$, $x = -1$

$f''(\frac{1}{3}) = 6 \cdot \frac{1}{3} + 2 = > 0$ ∴ LOK. MIN $f(\frac{1}{3}) = -\frac{5}{27}$



x	$f(x)$
-1	1
1	1
0	0
-2	-2
$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{27}$

SVAR: $f(x) = x^3 + x^2 - x$