

SF1625 Envariabelanalys för CDATE1 extra övningsuppgifter

Dessa uppgifter delades ut inför kontrollskrivningarna på förra årets kurs. Svårighetsgraden varierar, men de flesta uppgifterna är av kalibern att de skulle kunna förekomma på en tenta. Ingen uppgift behandlar differentialekvationer. Det betyder inte att de är mindre viktiga, utan beror på att förra årets KS:ar ej omfattade detta avsnitt.

1. Visa med definitionen av gränsvärde att

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = 2.$$

2. Vi har lärt oss att en kontinuerlig funktion på ett slutet, begränsat intervall måste anta max och min. Hur är det med halvöppna intervall? Är det sant att en kontinuerlig funktion på $(0, 1]$ måste anta åtminstone endera av max *eller* min? Bevisa det, eller ge ett motexempel.

3. Ett snapsglas har formen av en uppochnedvänd kon med höjd 8 cm och cirkulär basyta med radie 3 cm. Man håller upp med ett jämnt flöde om $10 \text{ cm}^3/\text{s}$. Hur snabbt stiger vätskenivån då den har nått 4 cm?

4. Härled derivatan för $\arcsin(x)$ genom att derivera sambandet $\sin(\arcsin(x)) = x$.

5. Betrakta funktionen

$$f(x) = \begin{cases} |\cos(x) + \sin(x)|^{\frac{1}{x}} & \text{om } x \neq 0, \\ e & \text{om } x = 0. \end{cases}$$

Är $f(x)$ kontinuerlig i $x = 0$?

6. Bestäm värdemängden till funktionen $f(x) = (1 + 2x)e^{-x^2}$ och skissa funktionsgrafen.

- 7.

- (a) Förklara begreppet *Riemannsumma*.
- (b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{\pi}{n} \sin\left(\frac{j\pi}{n}\right).$$

8. Antag att $f(x)$ är en udda funktion som är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$. Bestäm

$$\frac{d}{dx} \int_{-x^2}^{x^2} (f(t) + e^{-t^2}) dt.$$

9. Finn arean hos det område i xy -planet som avgränsas av kurvorna $y = -2 \arctan(x)$, $x = 1$ och $y = \sqrt{x}$.

10. Använd upprepad partiell integration för att bestämma alla primitiva funktioner till $f(x) = 2e^x \cos(x)$.

11. Beräkna integralen

$$\int_0^{\pi/2} \frac{4 \sin(x) + 5}{\sin^2(x) + 3 \sin(x) + 2} \cos(x) dx.$$

12. En skål konstrueras genom att låta kurvan $y = x^2$ rotera kring y -axeln. Om man håller i 18 volymenheter vätska, hur högt når vätskenivån?

13. Man konstruerar en tunn cirkulär skiva med radie R cm och densitet som varierar med avståndet r (cm) från centrum enligt $\rho(r) = 1/\sqrt{r^2 + 1}$ (g/cm²). Vad väger skivan?

14. Visa olikheten

$$2\sqrt{N+1} - 2 \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}}$$

genom att tolka högerledet som en överskattning av en lämplig integral.

15. Approximera $e^{-1/3}$ med hjälp av ett lämpligt valt Maclaurinpolynom så att felet blir mindre än en tusendel. (En motivering till att din approximation klarar kravet krävs förstås.)

16. Härled den "kända" Maclaurinutvecklingen för $\ln(1+x)$ genom att utgå från följande identitet för en geometrisk serie då $|x| < 1$:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n.$$

17. Bestäm Maclaurinpolynomet av grad 8 för funktionen $\cos(x^2)$ och använd resultatet för att beräkna gränsvärdet

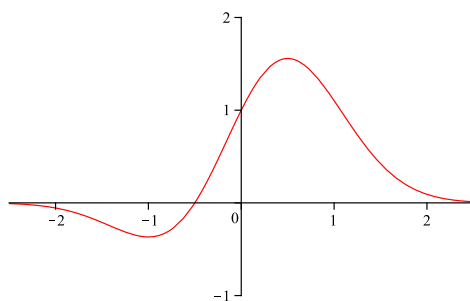
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - x^4 - 2 \cos(x^2)}{x^8}.$$

18. Finn Taylorpolynomet av grad 2 kring $x = 1$ för funktionen

$$f(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt.$$

Svar:

2. Påståendet är inte sant.
3. $\frac{40}{9\pi}$ cm/s
5. Ja
6. $V(f) = [-\frac{1}{e}, \frac{2}{e^{1/4}}]$; skiss nedan
7. (a) Se kursboken. (b) 2
8. $4xe^{-x^4}$
9. $\frac{2}{3} + \frac{\pi}{2} - \ln 2$ areaenheter
10. $e^x(\cos(x) + \sin(x)) + C$, $C \in \mathbb{R}$
11. $3 \ln 3 - 2 \ln 2$
12. $\frac{6}{\sqrt{\pi}}$ längdenheter
13. $2\pi(\sqrt{R^2 + 1} - 1)$ gram
15. $\frac{58}{81}$; felet är positivt och mindre än $\frac{1}{81 \cdot 24} < \frac{1}{1000}$.
17. $1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{24}x^8$; $-\frac{1}{12}$
18. $\frac{1}{e}(x-1) - \frac{1}{e}(x-1)^2$



Skiss i uppgift 6.