KTH Matematik
Examinator Lars Filipsson
Lärare Kristian Bjerklöv, Tomas Ekholm, Axel Hultman, Kirsti Mattila och Jan-Olov Strömberg

SF1625 Envariabelanalys
Kontrollskrivning 1 den 2 november
Lösningsförslag

1. **Hur många olika reella lösningar har ekvationen $x^4 + x - 1 = 0$? Tips: gör ett teckenstudium av derivatan och skissa kurvan $y = f(x)$ för funktionen $f(x) = x^4 + x - 1$. (Du behöver inte bestämma lösningarna.)**

Lösning: Låt $f(x) = x^4 + x - 1$. Antalet lösningar till ekvationen $x^4 + x - 1 = 0$ är nu detsamma som antalet nollställen till funktionen f.

Då f är ett polynom är f kontinuerlig på hela reella axeln. Vi observerar direkt att $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$. Vi deriverar och får $f'(x) = 4x^3 + 1$, som existerar för alla reella tal x. Vi ser att

$$f'(x) = 0 \iff 4x^3 + 1 = 0 \iff x = -(1/4)^{1/3}.$$

Ett teckestudium av derivatan ger att:
om $x < -(1/4)^{1/3}$ så är $f'(x) < 0$ och f alltså strängt avtagande,
om $x > -(1/4)^{1/3}$ så är $f'(x) > 0$ och f alltså strängt växande.

Vi ser vidare att $f(-(1/4)^{1/3}) = (-(1/4)^{1/3})^4 - (1/4)^{1/3} - 1 < 0$ (den första termen är ju mindre än 1 och den andra är negativ).

Det följer av ovanstående att funktionen f har en lokal minpunkt i $x = -(1/4)^{1/3}$, som också måste vara en global minpunkt, och funktionen är strängt avtagande till vänster om minpunkten och strängt växande till höger om densamma. Eftersom funktionsvärdet i minpunkten är mindre än noll så är antalet lösningar till ekvationen $f(x) = 0$ två. Vilket också är svaret på frågan i uppgiften.

Svar: Två

2. **Låt $f(x) = xe^{x^2-2x}$. Gör följande:**
A. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i den punkt på kurvan som har x-koordinat 2.
B. Använd resultatet i A för att beräkna ett närmevärde till $f(1.8)$.

Lösning A: Eftersom $f(2) = 2$ så söks tangenten i punkten $(2,2)$. Vi deriverar f och får $f'(x) = e^{x^2-2x} + (2x-2)xe^{x^2-2x} = (2x^2-2x+1)e^{x^2-2x}$. Vi ser att $f'(2) = 5$, som därför är riktningskoefficient till tangenten i den givna punkten. Tangentens ekvation är alltså $y = 5x + m$ för något tal m. Eftersom tangenten ska passera genom punkten $(2,2)$ måste $2 = 5 \cdot 2 + m$ varför $m = -8$. Tangentens ekvation är alltså $y = 5x - 8$.

Lösning B. Vi använder tangenten som approximation till funktionskurvan för x nära 2, med andra ord $f(x) \approx 5x - 8$ när x är nära 2. Speciellt är $f(1.8) \approx 5 \cdot 1.8 - 8 = 1$, som är vårt sökta närmevärde.

Svar: A. Tangentens ekvation är $y = 5x - 8$. B. $f(1.8) \approx 1$.

3. **Bestäm de lokala extrempunkterna till funktionen $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$ och avgör om dessa är lokala min- eller maxpunkter.**

Lösning: Vi observerar först att definitionsmängden till f består av alla rella tal x i intervallet $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$ (det som står under rottecknet får inte vara negativt).

Vi deriverar och får

$$f'(x) = \sqrt{2-x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}} = \frac{2-2x^2}{\sqrt{2-x^2}},$$

som existerar för alla x i intervallet $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. I detta intervall söker vi nu punkter där derivatan är noll och ser att

$$f'(x) = 0 \iff 2 - 2x^2 = 0 \iff x = \pm 1.$$

Dessa är kandidater till lokala extrempunkter. Vidare är ändpunkterna på intervallet också kandidater. Vilka av dessa som verkligen är lokala extrempunkter tar vi reda på genom att teckenstudera derivatan:

Om $-\sqrt{2} < x < -1$ så är $f'(x) < 0$ och funktionen f alltså strängt avtagande.
Om $-1 < x < 1$ så är $f'(x) > 0$ och funktionen f alltså strängt växande.
Om $1 < x < \sqrt{2}$ så är $f'(x) < 0$ och funktionen f alltså strängt avtagande.

Det följer av ovanstående att funktionen f har fyra lokala extrempunkter:
Ett lokalt max i $x = -\sqrt{2}$
Ett lokalt min i $x = -1$
Ett lokalt max i $x = 1$
Ett lokalt min i $x = \sqrt{2}$