KTH Matematik
Examinator Lars Filipsson
Lärare Jockum Aniansson, Karim Daho, Lars Filipsson, Jens Hoppe, Serguei Shimorin

Lösningsförslag
SF1625 Envariabelanalys, Kontrollskrivning 2 den 24 november 2010

1. **A. Skriv om integralen $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin x \cos^3 x\, dx$ med hjälp av substitutionen $u = \cos x$.**

   B. Beräkna integralen med hjälp av omskrivningen i uppgift A.

Lösning. A. Med substitutionen $u = \cos x$, där ju u är injektiv på intervallet $[\pi/4, \pi/3]$, får vi $du = -\sin x\, dx$ och $x = \pi/4 \Leftrightarrow u = 1/\sqrt{2}$ och $x = \pi/3 \Leftrightarrow u = 1/2$ och vi kan därför göra omskrivningen

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin x \cos^3 x\, dx = \int_{1/\sqrt{2}}^{1/2} -u^3\, du = \int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} u^3\, du.$$

B. Vi får nu med hjälp av omskrivningen ovan

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin x \cos^3 x\, dx = \int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} u^3\, du = [u^4/4]_{1/2}^{1/\sqrt{2}} = \frac{3}{64}.$$

Svar A. $\int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} u^3\, du$ B. $\frac{3}{64}$.

2. **Bestäm med hjälp av partiell integration alla primitiva funktioner till funktionen $f(x) = x^4 \ln(-x)$.**

Lösning. Vi använder formeln för partiell integration och får

$$\int x^4 \ln(-x)\, dx = \frac{x^5}{5}\ln(-x) - \int \frac{x^5}{5}\cdot\frac{1}{x}\, dx = \frac{x^5}{5}\ln(-x) - \int \frac{x^4}{5}\, dx = \frac{x^5}{5}\ln(-x) - \frac{x^5}{25} + C$$

där C är ett godtyckligt reellt tal.

Svar: De primitiva funktionerna till $f(x) = x^4 \ln(-x)$ utgörs av $F_C(x) = \frac{x^5}{5}\ln(-x) - \frac{x^5}{25} + C$ där C är ett reellt tal som får väljas fritt.

3. **A. Approximera integralen $I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 9x + 20}$ med hjälp av en Riemannsumma med två termer.**

B. Beräkna integralen exakt med hjälp av partialbråksuppdelning.

Lösning. A. Vi delar in integrationsintervallet i två lika stora delintervall, det första från -1 till 0 och det andra från 0 till 1. Längden på delintervallen är då 1. Sedan väljer vi en punkt i varje delintervall att räkna ut funktionsvärdet i, låt oss välja vänstra ändpunkten:

I delintervallet mellan -1 och 0 väljer vi punkten -1 och i delintervallet mellan 0 och 1 väljer vi punkten 0.

Nu bildar vi vår Riemannsumma genom att ta funktionsvärde gånger delintervallslängd och summera. Med $f(x) = 1/(x^2 - 9x + 20)$ bildar vi alltså summan

$$f(-1) \cdot 1 + f(0) \cdot 1 = \frac{1}{30} \cdot 1 + \frac{1}{20} \cdot 1$$

som är vår Riemannsumma. Om vi räknar ut summan och förenklar får vi $1/12$ som är en approximation av integralen I.

B. Eftersom $x^2 - 9x + 20 = 0 \iff x = 5$ eller $x = 4$ får vi med hjälp av faktorsatsen att $x^2 - 9x + 20 = (x-5)(x-4)$. Det betyder att vi kan partialbråksuppdela genom att göra ansatsen

$$\frac{1}{x^2 - 9x + 20} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-4}$$

där vi genom att göra liknämigt och identifiera koefficienterna får att vi måste ha $A = 1$ och $B = -1$. Med andra ord har vi då att

$$\frac{1}{x^2 - 9x + 20} = \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-4}$$

och nu kan vi räkna ut integralen:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 9x + 20} = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-4} \right) dx = [\ln|x-5| - \ln|x-4|]_{-1}^{1} = \ln 4 - \ln 3 - \ln 6 + \ln 5 = \ln \frac{10}{9}.$$

Svar B: $\ln(10/9)$