KTH Matematik

Seminarium 5 i kursen SF1625 Envariabelanalys

1. Finn den allämnna lösningen till följande differentialekvationer!

   A. $y'(t) + 3y(t) = 0$

   B. $\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{u}{RC}$, där R och C är positiva konstanter.

   C. $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0$

   D. $4y''(t) + 12y'(t) + 9y(t) = 0$

   E. $-v\dfrac{dT}{dx} = \alpha\dfrac{d^2T}{dx^2}$ där v och α är positiva konstanter.

   Ovanstående är homogena linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter. Om ordningen är 2 står allt man behöver veta i kapitel 8.6 och det är lätt att anpassa lösningsgången till det fall då ordningen är 1 – den karaktäristiska ekvationen blir enklare och har bara en lösning.

2. Lös initialvärdesproblemen:

   A. $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 16y = 8t \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$

   B. $\begin{cases} y''(t) - 9y'(t) + 20y(t) = 40 \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 4 \end{cases}$

   C. $E = Ri + L\dfrac{di}{dt}$ med begynnelsevillkoret $i(0) = 0$. Här är E, R och L positiva konstanter.

   Om detta står i kapitel 8.6 och 8.7. Observera att lösningen innehåller tre steg: först finner man motsvarande homogena ekvations allmänna lösning, sedan finner man en partikulärlösning, därefter adderar man dessa och bestämmer konstanter så att begynnelsevillkor uppfylls.

3. För vilka värden på konstanten $\lambda > 0$ har randvärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda^2 y(x) = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

icke-triviala lösningar (dvs lösningar som inte är identiskt noll)?
Här kan man tänka som i föregående uppgift. Enda skillnaden är att villkoret inte är ett begynnelsevillkor utan ett s.k. randvillkor. Angående uttrycken icke-trivial och identiskt noll: man ser ganska snabbt att den funktion y som är noll för alla x är en lösning, men uppgiften går ut på att bestämma λ så att det även finns andra lösningar.

4. I X-stad bor idag 10 000 människor. Man räknar med att stadens befolkning varje år ökar med 0.1 procent, till följd av att det är fler personer som föds än som dör. Dessutom har staden en nettoinflyttning på 100 personer varje år, dvs det är 100 fler som flyttar in till staden än det är som flyttar därifrån. Gör en matematisk modell i form av en differentialekvation som beskriver befolkningsutvecklingen i staden. Vilket begynnelsevillkor bör uppfyllas? När är stadens befolkning 11 000? Hur realistisk är modellen på lång sikt?

5. Efter en gasolycka börjar det sippra in förorenad luft i en lokal vars volym är 2000 kubikmeter. Den förorenade luften har en koncentration av 10 procent av det giftiga ämnet och sipprar in i en takt av 0.1 kubikmeter per minut. Samtidigt sugs lika mycket av (den väl blandade) luften i lokalen ut. När är koncentrationen av det giftiga ämnet i lokalen uppe i 1 procent?

Ovanstående uppgifter ska lösas inför seminarietillfälle 5. Till seminariet ska man ha med sig lösningar på dessa uppgifter, skrivna på ett papper per uppgift, med namn och personnummer på. Lösningarna (med undantag för uppgift 1) ska vara väl motiverade och tydligt skrivna. Även en person som inte är insatt i problemet i förväg ska lätt kunna läsa och förstå era lösningar. Rita figur, förklara alla beteckningar ni inför, använd vårt svenska språk för att förklara hur ni resonerar!

Vid seminariet kommer lösningarna att behandlas och diskuteras. Exempel på vad som kan hända: några uppgifter samlas in och rättas av lärare, några uppgifter kamraträttas, dvs rättas av andra studenter, några uppgifter blir lösta på tavlan av studenter (t ex av dig!). Precis vad som ska hända och vad du ska göra får du veta när du kommer dit. Men du måste vara så förberedd att du kan förklara alla dina lösningar framme vid tavlan inför de andra studenterna.

Godkänd vid ett seminarietillfälle blir du om du både närvarar vid hela seminarietillfället och på ett korrekt och bra sätt utför de uppgifter du blir tilldelad, dvs räknar och förklarar vid tavlan, rättar andra studenters lösningar, lämnar in korrekta och välskrivna lösningar osv.

Godkänd på hela seminarieserien blir du om du är godkänd på minst 4 av de 6 seminarietillfällena. Klarar du det får du automatiskt 3 poäng på uppgift 3 vid det ordinarie skriftliga tentamenstillfället och det ordinarie omtentamenstillfället (och endast vid dessa tillfällen). Väl godkänd blir du om du är godkänd på alla 6 seminarietillfällena och du får då på motsvarande sätt automatiskt 4 poäng på uppgift 3. Om du har 3 poäng på uppgiften genom seminarierna och vill höja till 4 poäng behöver du göra hela uppgiften korrekt vid tentamen.

Det är tillåtet att samarbeta med andra när du löser uppgifterna, men det är inte tillåtet att skriva av en lösning eller lämna in en lösning som du inte arbetat med själv. Var och en ska skriva sina egna lösningar. Och observera detta: det räcker inte att du har med dig lösningar, du ska i detalj kunna förklara varje steg i lösningarna. Om du inte muntligt och skriftligt ordentligt kan förklara din egen lösning riskerar du att inte bli godkänd!